Notes sur l'histoire des mathématiques.

par

H.-G. Zeuthen.

Suite[1]).

(Présenté à la séance du 3 mai 1895.)

V. Sur le fondement mathématique de l'invention du calcul infinitésimal.

Dans le cahier récemment paru des *Leçons sur l'histoire des Mathématiques* [2]), M. Cantor s'occupe principalement de la fondation du calcul infinitésimal par Newton et Leibniz. Avec l'exactitude historique qui lui est propre, il a démêlé les contributions dues à ces deux grands hommes et à leurs contemporains, il en a fixé les dates et a discuté avec soin la question de savoir dans quelle mesure chacun d'eux a connu les découvertes de l'autre. Il a ainsi porté à la connaissance de ses lecteurs les faits qui doivent servir de base au jugement dans le célèbre débat de priorité entre les deux grands géomètres. L'histoire de ce débat est réservée pour le cahier suivant.

Au commencement du cahier paru M. Cantor caractérise fort bien le progrès colossal marqué par l'invention d'un calcul

---

[1]) Voir aux p. 1 et 303 de l'année 1893 et à la p. 37 de la présente année du Bulletin.

[2]) T. III, 1er cahier.

infinitésimal, en disant que ce calcul a rendu accessibles à tous les sommets où jusqu'alors les esprits d'élite pouvaient seuls s'élever. C'est cette pensée qui s'impose par exemple à qui étudie les quadratures de Fermat. Pour bien expliquer ses idées aux lecteurs modernes, nous avons dû, dans notre Note précédente [1]), nous servir du langage du calcul différentiel et intégral; mais Fermat a su concevoir, retenir et rendre fécondes ces mêmes idées sans autre algorithme que le système de notations de Viète.

L'accord existant sur ce point entre M. Cantor et moi me porte même à croire possible de nous réunir pour caractériser de la même manière l'importance du progrès réalisé par l'invention de la géométrie analytique et les rapports de cette méthode moderne avec la géométrie des anciens.

C'est surtout en donnant aux opérations infinitésimales un algorithme et en en faisant ainsi un calcul soumis à des règles uniformes et simples que Newton et Leibniz ont rendu ces opérations accessibles à tous ceux qui s'approprient ces règles une fois pour toutes. M. Cantor a donc eu à s'occuper des rapports qui existent entre les inventions des deux sortes d'algorithmes qu'on doit à ces grands hommes. Il constate l'indépendance de ces inventions l'une par rapport à l'autre. Celle de Newton à été faite la première; mais Leibniz, qui a vu plus clairement l'importance de règles détaillées et uniformes, a le premier publié l'algorithme qu'on lui doit. L'utilité de cet algorithme s'est revélée immédiatement par les nombreuses découvertes qu'ont faites Leibniz lui-même et ses premiers successeurs sur les terrains déjà connus et par la découverte de nouveaux domaines accessibles à la nouvelle analyse. La théorie des *fluxions* de Newton a été très fructueuse pour son auteur dans ses propres recherches, si impor-

---

[1]) Sur les quadratures avant le calcul infinitésimal, et en particulier sur celles de Fermat, voir ce Bulletin 1895, p. 37.

tantes, et elle a été utilisée aussi par une partie de ses successeurs anglais; mais ce sont les *différentielles* et *intégrales* de Leibniz qui restent en usage aujourd'hui.

Cependant la réduction à un calcul infinitésimal d'un certain nombre d'opérations infinitésimales, telles que des esprits d'élite en ont connues avant Newton et Leibniz, ne repose pas exclusivement sur l'invention et le développement d'un algorithme. Cette invention, ou du moins son utilité, dépend de plusieurs progrès mathématiques très importants, et ces progrès sont dus à Newton. Nous citerons en première ligne l'usage des séries infinies et la découverte capitale du caractère inverse des deux opérations infinitésimales que depuis Leibniz on appelle la différentiation et l'intégration [1]).

Ces deux opérations étaient connues, de fait, avant Newton et Leibniz. Archimède et après lui les Keppler, les Cavalieri, les Fermat, les Pascal et les Wallis avaient exécuté des quadratures et des cubatures par la même décomposition des grandeurs à évaluer qui caractérise aujourd'hui leur détermination par des intégrales définies; et nous avons montré dans notre Note précédente qu'on avait bien reconnu l'unité des procédés appliqués à des questions géométriques de nature différente: ayant exécuté une quadrature dans un système orthogonal de coordonnées, on savait fort bien en appliquer le résultat à d'autres quadratures ou à des cubatures et plus tard à des rectifications ou à des déterminations de centres de gravité. Cependant pour cette exécution des quadratures on ne possédait aucune méthode générale, à l'exception des réductions de Fermat et de Pascal analogues à la réduction des intégrales au moyen de l'intégration par parties et

---

[1]) M. Paul Tannery (*Bulletin de Darboux* 1894, p. 232) regarde aussi la découverte de ce caractère inverse comme le véritable point de départ de la fondation du calcul infinitésimal.

de substitutions assez particulières. A ces exceptions près on en était réduit à soumettre chaque nouvelle quadrature à un nouveau procédé.

Newton inventa une méthode générale, appliquée avant lui, mais à son insu, par Mercator à un cas particulier, celle qui consiste à développer l'ordonnée de la courbe à carrer — c'est-à-dire la fonction à intégrer — en une série infinie procédant suivant les puissances de l'abscisse, et à en intégrer ensuite chaque terme. La généralité de cette méthode, applicable non seulement à toutes les fonctions dépendant d'équations algébriques, mais aussi à des fonctions transcendantes, allait donner aux opérations du nouveau calcul infinitésimal la généralité nécessaire pour en faire un instrument de recherche universel; mais en général elle ne comporte qu'une quadrature approchée et ne permet qu'assez fortuitement de distinguer les cas où l'on peut exécuter exactement une quadrature ou du moins la réduire à une autre.

Le développement de la méthode de différentiation avant Newton a eu un cours tout à fait différent. Cette opération ne remonte qu'à Fermat, qui la définit d'une manière très précise. Il ne donne pourtant aucun nom particulier au résultat de cette opération, qui est ainsi privée du caractère d'individualité qu'elle a acquis plus tard, mais il en montre les principales applications à la détermination des *maxima* et *minima*, des tangentes, et de certains centres de gravité. Il en mentionne même l'application à l'étude des propriétés des nombres[1]; application qui a consisté probablement dans la déduction d'identités nouvelles par la différentiation d'identités connues.

Alors que chaque nouvelle quadrature exigeait une nouvelle invention, la différentiation est, comme la multiplication, une opération directe, dont il suffit de connaître la définition pour

---

[1]) *Varia Opera* p. 137.

l'exécuter dans les cas les plus simples, et pour être mis, tout au moins, sur la voie dans les cas où les fonctions à différentier présentent des difficultés particulières. Les définitions de Fermat suffisent déjà pour trouver — toujours implicitement dans les applications où il y en a besoin — les quotients différentiels des fonctions algébriques et rationnelles. Dans les déterminations de tangentes, il sait même les tirer d'une équation en x et y. Les règles de Hudde, Sluze et Barrow, qui se rattachent à l'une ou à l'autre des différentes recherches auxquelles Fermat appliquait sa différentiation, prescrivent — toujours sans faire de la différentiation une opération indépendante — la manière dont il faut différentier une fonction déterminée par une équation algébrique. Ces mêmes règles n'avaient besoin que d'être rattachées à la notion nette de *différentielle* ou de *fluxion* pour devenir des règles de différentiation. Le calcul différentiel était donc créé au moment même où Leibniz et Newton avaient introduit l'une ou l'autre de ces deux notions. Son développement ultérieur pouvait demander du travail et de l'attention, mais il n'exigeait aucune invention à proprement parler.

L'invention du calcul intégral ne demandait pas nécessairement de notion nouvelle. Les aires qui servent à représenter les intégrales formaient des objets de recherche aussi bien définis que nos intégrales; leur nature géométrique les rendait même plus manifestes que n'eût fait alors une définition abstraite, et nous avons dit qu'on savait en faire les mêmes applications que des intégrales. Ce dont on avait besoin, c'était d'une nouvelle découverte, à savoir que la quadrature est l'opération inverse de la différentiation. Après cette découverte on pouvait, pour venir à bout des quadratures ou intégrations, procéder comme on le fait pour la division et les autres opérations inverses. On effectue les divisions en dressant des tables de multiplication et en y cherchant les facteurs qui, multipliés par des facteurs donnés, forment des produits donnés. Les divisions dont le dividende et le diviseur ne se trouvent pas combinés dans ces tables conduisent à l'introduction des fractions. De même, pour se mettre en possession des différentes quadratures, il fallait se rendre compte des résultats de la différentiation des diverses fonctions, et dresser, aussi complètement que possible, des tables permettant de voir quelles expressions des ordonnées peuvent résulter de la différentiation des fonctions connues (exprimant alors les aires). Les fonctions qu'on ne peut obtenir par ces différentiations seront alors les ordonnées de courbes dont les aires ne sont pas exprimables au moyen de fonctions connues, ce qui n'empêche pas d'étudier ces aires en les développant en séries et en en formant des classes réductibles à des types fixes.

Cependant, depuis l'instant où l'on avait commencé de faire usage de la notion abstraite et analytique de fluxion ou de différentielle, il devenait naturel de chercher à débarrasser aussi le résultat de l'opération inverse de sa représentation géométrique par la quadrature d'une aire. Il ne suffisait pas évidemment de lui donner le nom d'*intégrale*, ou de parler de la *fluente* dont la fluxion est donnée; car l'existence de cette fonction n'était garantie, dans les cas où l'on ne savait pas exécuter l'intégration, que par sa représentation au moyen d'une aire. L'usage, déjà mentionné, des séries infinies pour représenter, dans certaines limites convenables des valeurs de la variable indépendante, une intégrale quelconque, rendit superflue cette représentation géométrique. Ce qui est plus important que d'éviter l'usage extrêmement simple et bien éprouvé de la géométrie, c'est que l'emploi de séries infinies donne aussi un sens à une équation différentielle, ou à une équation contenant des fluxions en même temps que des fluentes. Grâce au développement en séries on pouvait s'assurer de l'existence de fonctions déterminées par ces équations, même dans les cas où l'on ne savait pas les réduire à des quadratures. En même temps ce développement permettait d'en trouver des valeurs approchées [1]).

On voit donc que la découverte du caractère inverse de la différentiation et de l'intégration et l'usage des séries infinies ne sont pas des fruits mais des conditions mathématiques de l'application utile de l'algorithme infinitésimal et du calcul auquel il donne lieu. Dans une discussion sur la gloire qui revient aux créateurs de ce calcul, il est donc essentiel de savoir quel est l'auteur de ces grands progrès; c'est là une question aussi importante que celle qui a pour objet l'invention même des algorithmes.

Nous avons dit que ces progrès sont dus à Newton. On en trouve la preuve dans le mémoire intitulé: *De analysi per æquationes numero terminorum infinitas*, qu'il a communiqué en 1669 à Collins [2]), mais qu'il avait déjà rédigé en 1665 et 1666 — années d'où datent aussi ses premières découvertes dans l'astronomie physique. Le titre cité montre que c'est avant tout de la méthode des séries que Newton s'occupe dans ce mémoire; mais un appendice indique d'une manière très précise le caractère inverse des deux calculs, dont nous avons parlé.

Dans le mémoire cité et dans les lettres à Leibniz dont nous aurons à parler plus tard et qui contiennent des communications sur la même méthode, Newton soumet diverses fonctions à des développements en séries infinies afin de leur donner une forme immédiatement carrable ou intégrable: ce sont des fractions, des radicaux et même des quantités dépen-

---

[1]) Dans le *Rapport* récemment paru de MM. Brill et Noether sur *Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit,* M. Brill fait remarquer avec grande raison que c'est déjà le même développement en série qui a le premier assuré aux fonctions algébriques une existence indépendante des courbes représentant les équations qui définissent ces fonctions.

[2]) Cantor III, p. 64. Le mémoire existe en plusieurs éditions, p. ex. *Newtoni Opuscula* p. 1—28.

dant d'une équation algébrique générale. Il obtient ses séries par une application réitérée des procédés servant ordinairement à la division et à l'extraction des racines, procédés qu'il étend à la détermination d'une racine d'une équation algébrique quelconque. En appliquant cette méthode à la résolution des équations numériques, on aura la méthode qu'on appelle ordinairement la méthode de Newton, mais qui ne diffère guère de celle que possédait déjà Viète. Appliquée aux équations à deux variables x et y, elle servira à exprimer l'une d'elles y par une série ordonnée suivant les puissances de l'autre, x. C'est cette méthode que Newton illustre par un diagramme appelé ordinairement le parallélogramme de Newton [1]). Elle est encore applicable à des équations contenant un nombre infini de termes, et Newton s'en sert pour l'inversion des séries, c'est-à-dire pour déduire de la série exprimant x au moyen de puissances de y une série exprimant inversement y au moyen des puissances de x. C'est de cette façon qu'il a déduit les séries exprimant e^x et $\sin x$ de celles qui représentent $\log x$ et $\arc \sin x$.

On voit bien que les séries servant à exprimer des fractions de numérateur 1 — fractions dont on peut déduire toutes les autres par une simple multiplication — et les séries qui représentent les radicaux sont les mêmes qui résultent de l'application de la formule générale du binôme; et Newton, l'auteur de cette formule, s'est aperçu au premier abord de la loi de formation de ses coefficients. Formée par une généralisation de celle qui a lieu dans le cas d'exposants entiers, elle avait même été le point de départ de ses recherches; mais, probablement à cause de la difficulté de donner à sa démonstration une forme assez générale, il préféra, dans l'*Analysis per æquationes infinitas*, en démontrer les applications particulières

---

[1]) Cette illustration ne se trouve pas toutefois dans l'*Analysis per æquationes infinitas*, mais plus tard dans la lettre à Leibniz du 24 octobre 1676 et dans la *Methodus fluxionum*.

par la division et par l'extraction des racines qui y conduisent[1]. Nous venons de voir que cette particularisation a conduit ensuite à un usage plus général, savoir au développement des racines d'une équation à un nombre fini ou infini de termes.

Quant aux renseignements plus détaillés sur les développements en série de Newton et sur les applications qu'il en a faites, soit dans le mémoire cité, soit dans la *Methodus fluxionum* où le développement en série par la méthode des coefficients indéterminés est son moyen principal de résoudre les équations différentielles, nous pourrons renvoyer au Leçons de M. Cantor[2]. Nous aurions seulement à y ajouter quelques mots sur la légitimité de ces développements, ce qui nous importe d'autant plus que nous insisterons plusieurs fois dans le présent mémoire sur l'esprit de rigueur de Newton. Cependant nous croyons bon de renvoyer cette discussion à une nouvelle Note, où nous aurons à nous occuper de plusieurs critiques qu'on a émises sur les travaux de Newton. Nous nous contenterons donc à présent de faire observer que Newton reconnaît parfaitement qu'après l'énoncé des lois du développement on a besoin d'une démonstration de leur exactitude, et que sa démonstration, contenue dans le dernier appendice à l'*Analysis per æquationes infinitas*, porte sur la convergence des séries.

Quant au caractère inverse des deux opérations infinitésimales, on en trouve la première application à l'exécution de quadratures dans le premier appendice au même mémoire. Immédiatement il ne s'agit que de la quadrature des paraboles de tous les ordres; mais Newton fait voir expressément la généralité de la méthode. Dans la *préparation* il parle d'un procédé pour trouver l'ordonnée y correspondant à l'abscisse x

---

[1]) On peut tirer ces renseignements de la lettre de Newton à Leibniz du 24 octobre 1676. *Newtoni Opuscula* I, p. 332.

[2]) On trouve aussi un exposé très clair d'une partie de ces développements dans Reiff: *Geschichte der unendlichen Reihen.*

d'une courbe lorsqu'on connaît l'aire z limitée par cette ordonnée, l'axe des x et la courbe. Ce procédé est la différentiation, ou bien la formation du rapport des fluxions de z et de x. N'ayant rien publié alors sur sa notion de *fluxion* il ne pouvait y renvoyer; mais il définit exactement son procédé en le rattachant à un système très clair de notations [1]). Il substitue, en effet, $x+o$ à x et en même temps $z+ov$ à z: alors l'ordonnée cherchée y est égale à la valeur de v qui correspond à $o=0$. Newton détermine cette valeur limite dans le cas dont il a besoin dans son mémoire, savoir celui où $z = \frac{n}{m+n} a x^{\frac{m+n}{n}}$; mais pour nous qui connaissons le calcul différentiel, il est clair que sa méthode est applicable à tous les cas où une équation algébrique a lieu entre x et z. Il ne serait pas permis d'en conclure immédiatement qu'il avait une entière connaissance de cette portée de son procédé; mais les lignes suivantes ne laissent sur ce point aucun doute. Newton y indique, en passant, un moyen de trouver autant de courbes d'aire connue qu'on en veut: il suffit de prendre une équation quelconque pour la relation entre l'aire z et la base x et d'en déduire l'ordonnée terminale y par l'opération qu'il vient de définir. Il cite l'exemple $z = \sqrt{a^2+x^2}$, qui conduira, dit-il, à $y = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Cet exemple montre que Newton sait appliquer sa méthode à des équations irrationnelles. Celui-ci fait remarquer expressé-

---

[1]) A cause de l'exactitude de cette définition, qui diffère en réalité assez peu de la définition moins explicite qu'avait donnée Fermat, on a vu y revenir, au XVIII[e] siècle, ceux que ne satisfaisait pas l'explication peu précise qu'on donnait alors des infiniment petits. Nous citerons à cet égard (d'après la Théorie des Fonctions de Lagrange) le géomètre anglais Landen, qui a proposé cette conception en 1758 et qui en a fait usage dans sa *Residual analysis* (1764). L'auteur danois Cramer (qu'il ne faut pas confondre avec le célèbre géomètre français de ce nom) avait fait la même chose en 1748: il semble n'avoir connu ni la définition de Newton ni celle de Fermat.

ment cet avantage de sa méthode de différentiation sur celles de Hudde et de Sluze[1]).

Cependant, pour juger de l'usage que Newton a su faire de cette méthode d'intégration, nous ne sommes pas réduits aux courtes allusions renfermées dans l'appendice à l'*Analysis.* Il existe de sa main un travail qu'on peut regarder comme l'exécution du programme contenu dans cet appendice. Nous pensons à son *Tractatus de quadratura curvarum.* Il est vrai que ce mémoire n'a été imprimé qu'en 1704; mais une introduction que Newton a mise en tête de cette édition montre qu'alors le corps même du mémoire existait déjà depuis quelque temps[2]). Les observations de Newton sur une lettre à Conti que nous venons de citer nous montrent encore que dès novembre 1666 Newton avait écrit un traité comprenant la plupart des théorèmes contenus dans le *Scholium* de la dixième Proposition de son livre sur les Quadratures. Or nous verrons plus loin que ce *Scholium* contient des tables des quadratures qu'il regarde comme les plus usuelles, quadratures dépendant si directement des recherches précédentes qu'il devait être alors en possession des principales méthodes dont il se sert dans le *Tractatus de quadratura.* Newton a inséré les mêmes tables dans la *Methodus fluxionum*, dont la première rédaction date de 1671, mais sans aucune indication complète sur la manière dont il les a élaborées; il voulait probablement réserver cette indication pour un mémoire particulier tel que le *Trac-*

---

1) Lettre à Collins du 10 décembre 1672 (*Opuscula* p. 298) et lettre d'Oldenburg à Leibniz du 26 juillet 1676 (Gerhardt: *Leibnizens mathematische Schriften* I, p. 92). On voit du reste par les observations de Newton sur une lettre de Leibniz à Conti en 1716 (*Opuscula* I, p. 409) que dès 1666 il avait étendu sa méthode de différentiation à des quantités fractionnaires, irrationnelles et transcendantes. Cela résulte aussi des quadratures, inverses de ces différentiations, dont nous allons parler et qui datent en partie de la même époque.

2) Voir la dernière ligne de l'introduction: *de quâ sequentia olim scripsi.* Le traité existe en plusieurs éditions, p. ex. *Opuscula* I, pp. 203—244.

tatus de quadratura, soit qu'il eût déjà rédigé ce traité, soit qu'il ne fût encore en possession que de celui de 1666.

Celui-là doit en tout cas être le produit d'un développement des doctrines qui se trouvaient déjà dans celui-ci. Comme Newton était dès 1666 en possession de la plupart des résultats consignés dans le *Scholium* cité, ce développement n'a pu consister que dans les généralisations poussées très loin qui se font admirer dans le *Tractatus* en même temps qu'elles en rendent la lecture difficile, et dans une introduction régulière de la notation $\dot{x}, \dot{y} \ldots \ddot{x}$, etc., des fluxions. En effet, d'après les observations citées, il ne s'en est servi que *quelquefois* en 1666. En lisant le *Tractatus*, on voit aussi que ces notations n'y jouent aucun rôle considérable. Les recherches qu'il contient auraient pu être exécutées presque avec la même facilité sans ces notations; au contraire elles ont dû contribuer beaucoup à préparer le terrain pour l'application du calcul fait avec ces notations ou avec celles des différentielles et intégrales.

Afin de ne pas borner nos citations à un traité de 1666 que Newton n'a jamais, que l'on sache, communiqué à personne, et à un travail (*Methodus fluxionum*) qui n'a paru qu'après le *Tractatus de quadratura*, nous ferons encore une remarque: c'est que la connaissance qu'avait Newton en 1676 des résultats principaux contenus dans ce dernier traité est attestée par ses lettres à Leibniz et à Collins dont nous aurons à nous occuper plus loin.

Pour toutes ces raisons nous trouvons fort probable l'indication consignée dans une note au bas du *Commercium epistolicum de analysi promota* [1]. Suivant cette note le *Tractatus de quadratura* a été rédigé en 1676 et n'était qu'un *extrait* d'un travail antérieur (probablement celui de 1666). Je suppose seulement que cet *extrait* devait contenir en même temps les

---

[1] A la p. 34 de l'édition de 1722.

généralisations et les changements de forme dont je viens de parler.

Le traité *De quadratura* donnera donc selon nous la meilleure idée de la manière dont Newton a su utiliser la découverte du caractère inverse des deux opérations, découverte que nous regardons comme le fondement de l'invention du calcul infinitésimal.

Dans l'*introduction* que nous venons de citer, Newton montre — comme il l'avait fait dans le mémoire sur les *æquationes numero terminorum infinitas* — que les ordonnées sont proportionnelles aux fluxions des aires, et il ajoute plusieurs exemples qui montrent la facilité et l'exactitude avec lesquelles on peut trouver les fluxions de fluentes (variables) données. Il finit par la remarque que c'est un problème plus difficile de déduire les fluentes de leurs fluxions.

C'est de ce dernier problème, c'est-à-dire du problème de l'intégration, qu'il va s'occuper dans la suite du mémoire, en y appliquant la méthode caractéristique de tous les calculs inverses. Il commence par un exposé clair et simple, mais très peu détaillé, de la différentiation ou de la formation des fluxions, auxquelles il applique ses notations particulières $\dot{x}$, $\dot{y}$, etc. Ce procédé nous est déjà connu par l'appendice à l'*Analysis per æquationes infinitas.* Il en étend l'application plus loin que ne le demande le problème dont il va s'occuper, en formant aussi les fluxions d'ordre supérieur, $\ddot{y}$, etc.

Nous saisissons cette occasion pour préciser ce que c'est que la *fluxion* d'une *fluente* (variable). La notion de fluxion, définie par la vitesse de la variation de la *fluente*, s'accorde exactement avec celle du quotient différentiel de la variable considérée par rapport à une variable indépendante arbitraire (le temps), ou bien avec celle des *différentielles* de Leibniz, qui leur attribue aussi des valeurs finies, proportionnelles aux incréments infiniment petits.

L'indétermination de la variable indépendante est bien permise tant que les équations ne contiennent que les premières fluxions et sont homogènes par rapport à elles; mais Newton fait observer expressément [1]) qu'il est commode de regarder, dans le cas de fluxions de fluxions, une des variables comme indépendante — ainsi que nous le dirions à présent — ou bien de la faire varier uniformément [2]) en donnant à sa première fluxion la valeur 1, à ses fluxions suivantes la valeur zéro. Dans le cas d'équations qui ne contiennent que des fluxions simples (équations différentielles du premier ordre) on peut profiter du choix de la variable indépendante pour rendre superflue l'homogénéité des équations par rapport aux fluxions: on la fait disparaître en égalant à 1 la fluxion de la variable qu'on traite comme indépendante. Réciproquement, c'est de cette façon que Newton explique dans sa *Methodus fluxionum* [3]) l'existence d'équations non homogènes. Il les rend homogènes, en introduisant de nouveau la fluxion $\dot{z}$ de la variable indépendante au lieu de l'unité, ou bien en remplaçant les expressions des autres fluxions $\dot{x}, \dot{y} \ldots$ par $\frac{\dot{x}}{\dot{z}}, \frac{\dot{y}}{\dot{z}} \ldots$ [4])

Les remarques générales sur la différentiation (formation des fluxions) sont suivies, dans le travail de Newton qui nous occupe, des recherches particulières destinées à préparer les quadratures. La proposition II consiste dans le problème suivant: *Invenire curvas quæ quadrari possunt*, énoncé qui rap-

---

[1]) *De Quadratura curvarum. Opuscula* I, p. 211.

[2]) Il imite à cet égard Neper, qui définit, de fait, ses logarithmes par une équation différentielle du premier ordre. La variable indépendante est représentée par un segment parcouru d'un mouvement uniforme, la variable dépendante par un segment parcouru avec une vitesse proportionnelle au segment qui sépare le point mobile d'un point fixe de la même droite (*Constructio canonis mirifici* 1619).

[3]) *Newtoni Opuscula* p. 63.

[4]) Selon nous on ne saurait mieux caractériser la nature de la variable indépendante que ne le fait Newton par ces deux remarques. Néanmoins MM. Weissenborn (*Die Principien der höheren Analysis* p. 33) et Cantor (III, p. 165) trouvent la dernière fort peu claire. Nous reviendrons sur ce point dans notre Note suivante.

pelle le titre de la fin de l'appendice déjà cité du mémoire sur les équations à un nombre infini de termes: *Inventio curvarum quæ quadrari possunt.* Aussi la solution que Newton donne ici est-elle la même qu'il avait indiquée alors: il faut prendre des expressions arbitraires pour les aires et en déduire par différentiation les expressions des ordonnées.

Cependant, soit pour avoir les moyens de carrer une courbe arbitrairement proposée (intégrer une fonction donnée), soit pour reconnaître l'impossibilité d'en exprimer l'aire au moyen de fonctions[1]) connues, il faut se rendre compte de la nature des fonctions qu'on peut former par différentiation, et pour y parvenir il faut étudier les formes qui résultent de la différentiation de fonctions d'une forme assez générale. Newton étudie donc successivement le résultat de la différentiation de $z^\vartheta R^\lambda$ (Prop. III) et de $z^\vartheta R^\lambda S^\mu$ (Prop. IV), R et S étant des polynômes en z^η. Les exposants ont des valeurs quelconques, et plus loin Newton attribue expressément à λ et μ des valeurs négatives ou fractionnaires. Newton montre que les ordonnées correspondant, pour l'abscisse z, à ces valeurs des aires (les quotients différentiels de ces fonctions) ont les formes suivantes: $Qz^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}$ et $Qz^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$, où Q est aussi un polynôme en z^η.

Si, réciproquement, il s'agit de carrer une courbe ayant pour ordonnée une de ces dernières valeurs, les intégrales auront les formes

$$z^\vartheta GR^\lambda \quad \text{et} \quad z^\vartheta GR^\lambda S^\mu,$$

G étant exprimé par une série, en général infinie, de la forme $A + Bz^\eta + Cz^{2\eta} + \ldots$ Newton détermine (dans les propositions V et VI) les coefficients $A, B, C\ldots$, en égalant les expressions données à celles qu'on obtient par la différentiation.

Ce qui nous intéresse ici particulièrement, c'est que Newton

[1]) Aucun malentendu ne peut résulter de ce que je me sers ici de cette dénomination plus moderne.

ne se borne pas à ce développement général, mais qu'il s'en sert pour trouver les intégrales algébriques sous forme finie dans les cas où il en existe. On le voit pour la première des deux formes par les remarques ajoutées à la démonstration de la proposition V. Dans ces remarques il dit comment doit être composé le facteur $R^{\lambda-1}$ pour que l'expression soit intégrable.

Dans le cas d'une fonction rationnelle, l'intégration sous forme finie sera impossible, si le dénominateur contient des facteurs affectés de l'exposant 1.

Si tous les facteurs du dénominateur sont multiples, on formera le polynôme R en divisant le dénominateur par le produit de ses différents facteurs linéaires. Il est facile ensuite de donner à la fraction le dénominateur R^2; λ devient dans ce cas égal à -1. On transforme le dénominateur d'une manière semblable, s'il contient en même temps des facteurs rationnels et des facteurs irrationnels. On évite en tout cas que le polynôme rationnel Q contienne le facteur R. La réduction à la forme $Qz^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}$ devient impossible si la fonction est fractionnaire en même temps que le numérateur contient des facteurs irrationnels. C'est probablement pour cette raison que Newton a étudié aussi les formes $Qz^{\vartheta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$.

Après ces transformations préliminaires, on obtiendra l'intégration sous forme finie, si elle est possible, par le développement indiqué: dans ce cas en effet, ce développement s'arrêtera de lui-même. C'est de cette manière que Newton trouve les intégrales [1])

$$\int \frac{z^5+z^4-8z^3}{z^5+z^4-5z^3-z^2+8z-4}\,dz = \frac{z^4}{z^3-3z+2},$$

$$\int \frac{3q^4-q^3x+9q^2x^2-qx^3-6x^4}{(q^2-x^2)(q^3+q^2x-qx^2-x^3)^{\frac{1}{3}}}\,dx = \frac{3q^2x+3x^3}{(q^3+q^2x-qx^2-x^3)^{\frac{1}{3}}}.$$

Nous voyons par sa lettre à Leibniz du 24 octobre 1676 [2])

---

[1]) Dans le premier membre du second exemple nous avons effacé un facteur q.

[2]) *Newtoni Opuscula* t. I, p. 328 s.

qu'à côté de ces intégrations assez particulières, quoique assez compliquées, Newton a obtenu par son procédé des règles assez générales sur l'intégrabilité de fonctions plus simples. Il montre que la série servant à la quadrature de la courbe

$$y = a z^{\vartheta}(e + f z^{\eta})^{\lambda}$$

se réduit à un nombre fini de termes, dans le cas où $\frac{\vartheta+1}{\eta} = r$ est un nombre entier et positif. La courbe admet alors une quadrature géométrique (c'est-à-dire algébrique). Newton ajoute au dernier de ses exemples[1]) que la même réduction sera possible si l'expression se ramène à la forme ci-dessus lorsqu'on l'écrit

$$y = a z^{\vartheta+\lambda\eta}(e z^{-\eta} + f)^{\lambda},$$

c'est-à-dire si $\frac{\vartheta+1}{\eta} + \lambda = r$ est un nombre entier positif. Il a donc reconnu les deux cas où nous savons intégrer les différentielles binômes, et il dit que ce sont les seuls, *quantum animadverto*.

La restriction que r doit être positif devient nécessaire parce que Newton demande une intégration algébrique, tandis qu'en nous occupant de la même question dans nos cours de calcul intégral nous envisageons aussi les cas de réduction aux fonctions logarithmiques ou circulaires. Ce n'est pas que Newton néglige ces derniers cas. Dans la lettre que nous venons de citer, il en parle en les qualifiant de réduction à la quadrature de sections coniques. Cette réduction, on la trouve dans le *Traité de la quadrature*, renfermée dans la réduction plus générale des intégrales d'une certaine forme à un nombre limité de types fixes. Dans la proposition VII Newton établit que toutes les intégrales $\int z^{\vartheta+\sigma\eta} R^{\lambda+\tau} dz$ où $R = e + f z^{\eta} + g z^{2\eta} + \ldots$, et où

---

[1]) *Newtoni Opuscula* t. I, p. 338. Cette addition doit avoir échappé à M. Cantor, qui n'attribue à Newton que la connaissance d'un cas principal (*ein Hauptfall*) où l'intégrale de différentielle binôme prend une forme finie (Cantor t. III, p. 179).

ϑ, η, λ, e, f, g, ... ont des valeurs données quelconques tandis que σ et τ sont des entiers, s'expriment par (des fonctions algébriques et) une seule des intégrales de cette catégorie si R est un binôme, par deux de ces intégrales si R est un trinôme, par trois si R est un quadrinôme, etc.

En effet, l'expression déjà trouvée de la différentielle de $z^\vartheta R^\lambda$ donne entre les intégrales $\int z^{\vartheta-1} R^{\lambda-1} dz$, $\int z^{\vartheta+\eta-1} R^{\lambda-1} dz$, $\int z^{\vartheta+2\eta-1} R^{\lambda-1} dz$ ... une relation qui permet d'exprimer l'une d'entre elles au moyen des autres. En remplaçant ensuite ϑ par $\vartheta+\eta$, $\vartheta+2\eta$, etc., on sera en état d'exprimer l'intégrale $\int z^{\vartheta+\sigma\eta-1} R^{\lambda-1} dz$ par une, deux, trois, etc., des autres, suivant que R est un binôme, un trinôme, un quadrinôme, etc. L'intégrale $\int z^{\vartheta+\sigma\eta-1} R^\lambda dz = \int z^{\vartheta+\sigma\eta-1} (e+fz^\eta+gz^{2\eta}+\ldots) R^{\lambda-1} dz$ est composée d'intégrales de la forme précédente.

Dans le cas d'un binôme la réduction de Newton comprend immédiatement celles dont on se sert aujourd'hui pour exprimer les intégrales de différentielles binômes à l'aide de celles où les exposants ont des valeurs assez simples. Toutefois en n'indiquant que sommairement le procédé, Newton n'a pas eu lieu d'observer les cas d'exception qui peuvent résulter de l'impossibilité des équations algébriques du premier degré à la résolution desquelles se ramène le problème de réduction. On voit aussi que Newton ne se sert pas de l'intégration par parties, mais les calculs qu'on aurait à exécuter pour parvenir au résultat final seraient essentiellement les mêmes que ceux auxquels conduirait cette opération.

Dans la proposition VIII Newton énonce la réduction analogue des intégrales de la forme $\int z^{\vartheta+\eta\zeta} R^{\lambda+\tau} S^{\mu+\nu} dz$ où ϑ, η, λ, μ ainsi que les polynômes R et S sont donnés, tandis que ζ, τ et ν ont des valeurs entières quelconques. Le nombre d'intégrales auxquelles on peut réduire celles-ci est égal à la somme des nombres des termes de R et S moins 2.

Toutes les fonctions algébriques et explicites qui ne contiennent que des radicaux simples peuvent être décomposées en termes ayant les formes GR^λ et $GR^\lambda S^\mu$. Newton a donc indiqué des méthodes, pénibles il est vrai mais générales, pour intégrer toutes ces fonctions algébriquement s'il est possible, et dans le cas contraire pour en réduire les intégrales à des types fixes. Il se met ensuite, dans la proposition IX, à la recherche des *transformations* servant à réduire aux formes connues ou déjà étudiées les intégrales d'autres fonctions dépendant d'équations algébriques. Il commence par indiquer sous forme de théorème la *transformation générale par substitution* d'une nouvelle variable indépendante, et ajoute, comme corollaires, différentes applications de cette transformation.

Le théorème est énoncé sous la forme suivante: *Æquantur curvarum areæ inter se quarum ordinatæ sunt reciproce ut fluxiones abscissarum*, et Newton le démontre en disant: *nam contenta sub ordinatis et fluxionibus abscissarum erunt æqualia, et fluxiones arearum sunt ut hæc contenta*; c'est-à-dire que l'aire $\int y\,dz$ sera égale à $\int v\,dx$ si $\frac{dz}{v} = \frac{dx}{y}$, car alors $y\,dz = v\,dx$. Il est évidemment sous-entendu que les intégrales (ou plutôt les aires qu'elles représentent) ont des limites correspondantes.

On voit que le théorème repose sur le caractère inverse de la quadrature et de la différentiation (ou formation des fluxions). En même temps cette dernière opération sert de base aux applications de la transformation considérée. En effet, comme le fait remarquer Newton dans son premier *Corollaire*, si l'on donne la relation $(x = \varphi(z))$ entre les abscisses, on en peut déduire le rapport de leurs fluxions $\left(\frac{dx}{dz} = \varphi'(z)\right)$ qui est égal à celui des ordonnées $\left(\frac{y}{v}\right)$, d'où résulte l'expression de la nouvelle ordonnée $v = \frac{y}{\varphi'(z)}$. On voit que c'est la transformation générale par substitution qu'expose ici Newton. Considérons les plus remarquables applications qu'il en fait:

Coroll. VII. Afin de trouver, dans le cas où

$$y^{\alpha}(e + fy^{\eta}z^{\delta} + gy^{2\eta}z^{2\delta} + hy^{3\eta}z^{3\delta} + \ldots)$$
$$= z^{\beta}(k + ly^{\eta}z^{\delta} + my^{2\eta}z^{2\delta} + \ldots),$$

l'intégrale (l'aire) $\int y\,dz$, on fait usage de la substitution $x = \frac{\eta}{\eta-\delta} z^{\frac{\eta-\delta}{\eta}}$; si alors $v = yz^{\frac{\delta}{\eta}}$, on aura $\int y\,dz = \int v\,dx$, et les nouvelles variables satisferont à l'équation suivante

$$x = \frac{\eta}{\eta-\delta} v^{\alpha\lambda}(e + fv^{\eta} + gv^{2\eta} + \ldots)^{\lambda}(k + lv^{\eta} + mv^{2\eta} + \ldots)^{-\lambda},$$

λ étant égal à $\frac{\eta-\delta}{\alpha\delta+\beta\eta}$.

La quadrature de la dernière courbe dépendant aussi de l'intégrale $\int x\,dv$, on voit que Newton a réussi à exprimer l'intégrale $\int y\,dz$ au moyen de celles dont il s'est occupé dans ce qui précède.

Coroll. VIII. Si

$$y^{\alpha}(e + fy^{\eta}z^{\delta} + gy^{2\eta}z^{2\delta} + \ldots)$$
$$= z^{\beta}(k + ly^{\eta}z^{\delta} + my^{2\eta}z^{2\delta} + \ldots) + z^{\gamma}(p + qy^{\eta}z^{\delta} + ry^{2\eta}z^{2\delta} + \ldots),$$

on peut encore faire la substitution $x = \frac{\eta}{\eta-\delta} z^{\frac{\eta-\delta}{\eta}}$ et $v = yz^{\frac{\delta}{\eta}}$. Alors la quadrature $\int y\,dz$ se réduira à celle de la courbe

$$v^{\alpha}(e + fv^{\eta} + gv^{2\eta} + \ldots)$$
$$= \left(\frac{\eta-\delta}{\eta}\right)^{\mu} x^{\mu}(k + lv^{\eta} + mv^{2\eta} + \ldots) + \left(\frac{\eta-\delta}{\eta}\right)^{\nu} x^{\nu}(p + qv^{\eta} + rv^{2\eta} + \ldots),$$

où
$$\mu = \frac{\alpha\delta+\beta\eta}{\eta-\delta}, \quad \nu = \frac{\alpha\delta+\gamma\eta}{\eta-\delta}.$$

Coroll. IX. L'intégrale

$$\int z^{\lambda\nu-1}(\nu e + (\nu+\eta)fz^{\eta} + (\nu+2\eta)gz^{2\eta} + \ldots)(e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \ldots)^{\lambda-1}$$
$$\times (a + b(ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \ldots)^{\tau})^{\omega}\,dz$$

se réduit par la substitution

$$x = (ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \ldots)^{\frac{\lambda}{1+\lambda\nu}}$$

à l'intégrale de différentielle binôme

$$\frac{\lambda}{1+\lambda\nu}\int x^{\lambda\nu}\left(a+bx^{\frac{\tau+\tau\lambda\nu}{\lambda}}\right)^{\omega}dx.$$

Newton signale comme les cas les plus simples les suivants: 1° $\lambda=1$; 2° $\tau=1$ et $(a+b(ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+\ldots))^{\omega}$ rationnel; 3° $\omega=-1$ et $\lambda=\tau=1$, $\nu=0$.

Coroll. X. L'intégrale

$$\int(\pi S\dot{r}+\varphi R\dot{s})R^{\lambda-1}S^{\mu-1}(aS^{\upsilon}+bR^{\tau})^{\omega}dz,$$

où R, S sont des polynômes en z, et $\dot{r}$, $\dot{s}$ leurs fluxions divisées par celle de z (c'est-à-dire, avec les notations modernes, $\frac{dR}{dz}$, $\frac{dS}{dz}$), se réduira, dans le cas où

$$\frac{\varphi}{\pi}=-\frac{\upsilon}{\tau},\quad \lambda=\pi\frac{\mu+\upsilon\omega}{\varphi},$$

par la substitution $x=R^{\pi}S^{\varphi}$ à une intégrale de la forme

$$\int x^{\vartheta}(a+bx^{\sigma})^{\omega}dx.$$

Newton signale encore plusieurs cas où l'intégrale donnée sous une forme assez générale prend une forme plus simple.

Dans les corollaires II-VI Newton se sert des substitutions $x=z^{\frac{\eta}{\nu}}$ et $x=\frac{1}{z}$ pour ramener les intégrales considérées dans ce qui précède, et contenant des polynômes en z^{η}, à d'autres qui contiennent des polynômes en x^{ν} ou x^{-1}. L'exposant ν pouvant être égal à 1, cette transformation lui sert à réduire le nombre des types essentiellement distincts les uns des autres.

En comparant cette transformation générale par substitution dont dispose Newton à celle de Fermat[1]), on voit bien quel grand progrès on doit aussi sur ce point à la découverte du caractère inverse des deux opérations infinitésimales. Ne connaissant pas le rapport qui existe entre la quadrature et la différentiation qu'il venait d'inventer lui-même, Fermat devait

---

[1]) Voir ma Note précedente (p. 54 de la présente année du Bulletin).

toujours éviter d'appliquer immédiatement ses substitutions à la variable indépendante (l'abscisse). Il avait donc toujours besoin d'intervertir les deux variables par d'admirables applications de son intégration par parties, très limitée elle aussi par cette même impuissance à combiner les deux opérations. Newton, qui avait à sa disposition la transformation générale par substitution, pouvait appliquer tout son génie à inventer des transformations de la plus grande portée.

En même temps que nous avons rendu compte des recherches de Newton qui ont pour but de préparer, autant que possible, la quadrature d'une courbe algébrique arbitrairement proposée (l'intégration d'une fonction algébrique), nous en avons signalé l'utilité et la portée. Il n'est guère douteux que l'inventeur n'en ait eu lui-même pleine conscience, sans quoi ses recherches n'auraient eu aucun but clair et net; mais en tout cas sa *proposition X* nous dispense de nous contenter de cette conclusion indirecte. Il s'y pose le problème de trouver *les figures les plus simples auxquelles on peut comparer une courbe géométrique* (algébrique) *quelconque dont l'ordonnée est une fonction explicite de l'abscisse z (determinatur per æquationem non affectam)*, et dans les corollaires il étend le même problème au cas de fonctions données implicitement (*curva cujus ordinata per æquationem quamvis affectam definitur*). La comparaison dont il s'agit est celle d'aires limitées par des courbes avec *les figures les plus simples*, savoir les figures rectilignes, dans les cas où une quadrature algébrique est possible, et dans les autres cas les aires limitées par les courbes que l'on convient de regarder comme les plus simples de leur espèce.

Newton montre tout ce que peuvent donner à cet égard les théorèmes déjà trouvés par lui. En ayant déjà parlé, nous nous contenterons ici d'en citer un seul exemple, qui prouve que la généralité des vues de Newton ne l'a pas empêché d'apercevoir la simplicité des résultats qu'on peut obtenir par des particularisations. Cet exemple est le même dont il parle dans sa lettre à Collins du 8 novembre 1676 [1]), où il se déclare capable de dire en moins d'un demi-quart d'heure, sur une courbe représentée par une équation de la forme $ax^\lambda + bx^\mu y^\sigma + cy^\tau = 0$, *whether it may be squar'd, or what are the simplest Figures it may be compar'd with.*

Comment y parvient-il? C'est ce qu'il explique dans le Coroll. II de la proposition X du traité *De quadratura.* L'intégrale $\int y\,dx$ se transforme en une intégrale de différentielle binôme par la substitution du corollaire VII de la *prop. IX*; cette dernière intégrale peut être simplifiée par les substitutions indiquées dans les premiers corollaires de la même proposition. Vient ensuite la condition pour que le résultat de l'intégration soit algébrique: le critère, dans ce cas, est celui que Newton a donné dans sa lettre à Leibniz; dans le cas contraire on peut appliquer les réductions indiquées dans la *prop. VII* (à laquelle Newton ne renvoie pas toutefois directement). Au moyen de ces procédés on trouvera, dans le cas où soit $\frac{\lambda + \tau}{\lambda\sigma + \mu\tau - \lambda\tau}$, soit $\frac{\sigma - \tau - \mu}{\lambda\sigma + \mu\tau - \lambda\tau}$, soit $\frac{\mu - \lambda - \sigma}{\mu\tau + \lambda\sigma - \lambda\tau}$ est un nombre entier positif, que l'intégration peut s'exécuter algébriquement. La forme la plus simple à laquelle Newton réduit ses intégrales dans les autres cas doit être probablement, d'après ses propres indications,

$$\int x^\alpha (a + bx)^\beta\, dx,$$

où $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $0 \leqq \beta \leqq 1$. Ces mêmes indications permettraient de calculer, en fonction d'exposants donnés absolument quelconques, des nombres que l'on peut ramener à α et β par l'addition ou la soustraction de nombres entiers, mais sans former les expressions générales de ces nombres. Newton a très bien pu *en moins d'un demi-quart d'heure* trouver α et β, quand on lui donnait λ, μ, σ et τ.

---

[1]) *Opuscula* I, p. 358. L'original anglais se trouve à la p. 39 des opuscules ajoutés par Jones à son édition des *Principia*.

Nous avons dit que dans le traité *De quadratura curvarum* Newton exécute le programme contenu dans l'addition au mémoire *De analysi per æquationes infinitas*. Nous venons de voir qu'il le fait en ébauchant à grands traits une théorie très générale de l'intégration des fonctions algébriques. Cependant les formules les plus générales ne conduisent pas toujours à la solution la plus facile des problèmes particuliers qu'on rencontre le plus souvent. On sait même que dans le calcul intégral il existe des cas spéciaux — et des plus intéressants — qui échappent aux considérations apparemment générales.

Newton a très bien vu l'importance de l'étude particulière que demandent ces différents cas, et il l'a commencée d'une façon très remarquable. Dans un *Scholium* ajouté à sa proposition dixième il dit expressément qu'il serait trop pénible d'avoir toujours recours à ses règles générales pour carrer les courbes; qu'il vaut mieux carrer une fois pour toutes les figures les plus simples et les plus usuelles, et dresser des tables de ces quadratures (intégrations). Il a donc entrepris le travail assez pénible d'élaborer celles de ces tables qui lui ont semblé le plus utiles. Nous avons déjà rappelé que cette élaboration date de 1666, et qu'elle est probablement antérieure aux généralisations contenues dans les autres propositions du traité. Il a inséré les tables soit dans le *Scholium* qui nous occupe, soit dans sa *Methodus fluxionum*. La première table contient pour $r = 1, 2, 3, 4$ les valeurs complètes des intégrales $\int z^{r\eta-1}(e+fz^{\eta})^{\pm\frac{1}{2}}dz$, valeurs dont la nature algébrique résulte des recherches générales qui précèdent. La seconde, plus étendue, a pour titre: *Tabula curvarum simpliciorum quæ cum ellipsi et hyperbola comparari possunt*. La réduction des aires de différentes courbes qu'elle contient est équivalente au fond à celle de diverses intégrales à des fonctions circulaires (aires d'ellipses) et logarithmiques (aires d'hyperboles). Les intégrales dont Newton opère la réduction auraient les formes

$$\int \frac{z^{r\eta-1}}{e+fz^\eta}\,dz, \qquad \text{pour } r = 1,\ 2,\ 3,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2},\ \tfrac{5}{2}$$

$$\int \frac{(e+fz^\eta)^{\pm\frac{1}{2}}}{z^{r\eta+1}}\,dz, \qquad \text{pour } r = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$$\int \frac{z^{r\eta-1}}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}\,dz, \qquad \text{pour } r = 1,\ 2,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2}$$

$$\int z^{r\eta-1}(e+fz^\eta+gz^{2\eta})^{\frac{1}{2}}dz, \qquad \text{pour } r = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$$\int z^{r\eta-1}(e+fz^\eta+gz^{2\eta})^{-\frac{1}{2}}dz, \qquad \text{pour } r = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$\int \frac{z^{r\eta-1}(e+fz^\eta)^{\pm\frac{1}{2}}}{g+hz^\eta}\,dz, \qquad \text{pour } r = 1,\ 2$$

$$\int z^{r\eta-1}\sqrt{\frac{e+fz^\eta}{g+hz^\eta}}\,dz, \qquad \text{pour } r = 0,\ 1,\ 2$$

Newton fait encore remarquer, pour l'une et l'autre table, les lois que suivent les coefficients des expressions intégrées, ce qui permet d'étendre les résultats obtenus à des valeurs plus grandes de r.

Les deux tables constituent un commencement de classification des intégrales d'après les types auxquels on peut les réduire. Pour continuer l'œuvre ainsi commencée, il fallait faire choix des types auxquels on voulait réduire les intégrales plus compliquées. Il fallait encore approfondir l'étude de ces types, les séries qui les expriment, etc., ce qui pouvait conduire à des modifications des types choisis. On en a fait une en substituant les fonctions circulaires et logarithmiques (ainsi que leurs fonctions inverses) aux aires auxquelles Newton réduit les intégrales de sa seconde table. On voit ainsi que la culture du vaste champ ouvert par Newton pouvait occuper pendant longtemps les géomètres qui étudiaient l'intégration des fonctions algébriques. C'est seulement Gauss et Cauchy qui ont commencé de sortir du cadre des intégrations de Newton en faisant prendre à la variable indépendante qui figure dans l'intégrale des valeurs complexes.

Il va sans dire qu'en continuant le travail de Newton, ses successeurs ont apporté aussi beaucoup de simplifications aux recherches qu'il avait achevées. Ils l'ont fait, non seulement par l'emploi d'un algorithme plus complet, mais aussi par une application plus directe de l'intégration par parties, que Newton remplace soit par un usage plus pénible des résultats connus de la différentiation, soit par la même interversion des deux variables (coordonnées) dont se servaient Fermat et Pascal. Cependant la onzième et dernière proposition du traité *De quadratura* rend probable, de la part de Newton, une connaissance plus directe de l'utilité de l'intégration par parties. Cette proposition n'est autre que le théorème sur la réduction d'une intégrale multiple à une intégrale simple. En substituant aux lettres par lesquelles Newton désigne les différentes aires les intégrales équivalentes, nous pourrons écrire les équations exprimant ce théorème de la manière suivante:

$$\int_0^t\int_0^z y\,dz^2 = t\int_0^t y\,dz - \int_0^t zy\,dz = \int_0^t (t-z)\,y\,dz$$

$$\int_0^t\int_0^z\int_0^z y\,dz^3 = \frac{t^2\int_0^t y\,dz - 2t\int_0^t zy\,dz + \int_0^t z^2y\,dz}{2} = \tfrac{1}{2}\int_0^t (t-z)^2\,y\,dz$$

. . . .

$$\int_0^t\int_0^z\int_0^z\int_0^z\int_0^z y\,dz^5 = \frac{t^4\int_0^t y\,dz - 4t^3\int_0^t zy\,dz + 6t^2\int_0^t z^2y\,dz - 4t\int_0^t z^3y\,dz + \int_0^t z^4y\,dz}{24}$$

$$= \tfrac{1}{24}\int_0^t (t-z)^4\,y\,dz.$$

Newton ne donne pas d'autre démonstration que les équations traduites ici d'une manière absolument fidèle par les notations du calcul intégral et qui correspondent aux transformations des intégrales multiples qu'on effectue aujourd'hui au moyen de l'intégration par parties. Il est donc naturel d'admettre qu'il les a trouvées par une application de ce procédé, quoiqu'on puisse les démontrer *a posteriori* par des différentiations.

Dans un *scholium* Newton montre encore comment on peut donner, par la notion des fluentes et de leurs fluxions successives, une forme plus analytique à son théorème, ce que nous avons déjà fait au moyen des notions correspondantes du calcul intégral. Il y ajoute l'application des quadratures à l'intégration de plusieurs équations différentielles, par exemple celle qui ont la forme $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$. Il finit par introduire la notion de constante arbitraire, notion dont il pouvait se passer dans l'étude des quadratures parce que les aires correspondent à des intégrales définies, mais qui devient indispensable lorsqu'il s'agit de déterminer la fluente par sa fluxion, opération équivalente à une intégration indéfinie. Il remarque que r intégrations superposées conduisent à un polynôme du degré $r-1$ à coefficients arbitraires.

Ses remarques finales accentuent encore le rapport qui existe entre la différentiation et l'intégration, rapport que nous avons regardé comme le principe fondamental de tout le traité, à savoir que la différentiation sert de preuve aux résultats trouvés ou présumés de l'intégration. Newton ajoute encore: «*Et his principiis via ad majora sternitur.*» Nous avons déjà montré combien ces paroles sont vraies si l'on a égard au développement ultérieur de la matière propre du traité. Elles le sont encore si l'on songe aux applications de ces principes aux équations différentielles dont le dernier *scholium* contient des exemples. Newton y a apporté sa contribution dans sa *Methodus fluxionum.*

Nous avons dit que la découverte du caractère inverse de la différentiation et de la quadrature et de l'importance fondamentale de ce caractère, ainsi que l'usage général des séries, appartiennent entièrement à Newton. Ce droit est constaté par l'*Analysis per æquationes infinitas* communiquée en 1669 à d'autres géomètres, tandis que le *Traité de la quadrature*, publié longtemps après, nous a fait voir seulement jusqu'à quel point Newton a su lui-même utiliser sa découverte. On ne doit donc avoir égard qu'au premier mémoire et à la correspondance de Newton et de Leibniz, en se demandant si, malgré la priorité de Newton, Leibniz n'a pas refait indépendamment les mêmes découvertes.

A cet égard nous renverrons aux résultats des recherches historiques de M. Cantor (t. III p. 154 et s.). Il résulte des extraits des papiers conservés de Leibniz que dès 1673 celui-ci a reconnu la connexion des deux opérations infinitésimales (p. 158), et qu'il commençait à en apercevoir l'utilité. Comme ses propres recherches infinitésimales portaient alors de préférence sur les opérations dépendant de différentiations plus ou moins directes, on est porté à le croire bien préparé à contribuer au développement de celle des deux opérations par laquelle il fallait commencer pour utiliser le mieux possible cette connexion. En commençant en 1675 à créer l'algorithme qui dépend de cette connexion des deux opérations et qui en même temps l'accentue, il laisse du moins entrevoir qu'il en a reconnu l'importance.

M. Cantor a encore rendu assez vraisemblable le fait que Leibniz n'a connu qu'en 1676 l'*Analysis per æquationes infinitas*, et que les extraits qu'il a faits de ce mémoire datent de la même époque. Une influence directe de Newton sur ces premiers travaux infinitésimaux de Leibniz semble donc devoir être écartée. Cependant, lorsqu'il s'agit de la propagation d'une idée si importante et en même temps si simple, si bien accommodée aux besoins de la science de ce temps et par conséquent si propre à lui donner un essor inconnu jusqu'alors, d'une idée qui de plus était énoncée si clairement quoiqu'en si peu de mots dans le mémoire de Newton, il faut compter aussi avec les suggestions indirectes. Leibniz avait passé en 1673 sept semaines à Londres. Il n'y trouva pas alors Collins, qui possédait depuis 1669 le manuscrit du mémoire; mais ce savant peut avant cette époque avoir fait preuve à l'égard d'autres géomètres de la même libéralité qu'il montra plus tard à Leibniz en lui permettant de regarder ce manuscrit et d'en faire des extraits [1]). Les idées de cette nature peuvent être colportées par des personnes qui n'en voient point la portée, et transmises à d'autres qui n'en aperçoivent que plus tard la valeur en revenant elles-mêmes à des études semblables. Malgré la réserve de Newton, il ne serait pas non plus difficile d'imaginer, à côté de ce manuscrit, d'autres voies soit écrites soit orales par lesquelles ses recherches fondamentales, qui datent de 1665 et 1666, ont pu se propager jusqu'à Leibniz, quand même ce dernier savant ne s'y serait guère intéressé pendant son séjour à Londres en 1673.

Nous ne savons rien d'une telle propagation, et nous avouons même que l'idée dont nous parlons, précisément parce qu'elle était mûre, a pu germer simultanément dans l'esprit de plus d'un grand homme.

Quoi qu'il en soit, la nature des recherches de Leibniz avant 1676 nous porte à croire, avec M. Cantor, qu'il devait alors ses suggestions à d'autres géomètres, qu'il a d'ailleurs cités plus tard, à Cavalieri, à Grégoire de Saint-Vincent et surtout à Pascal et à Huygens, plutôt qu'à Newton ou à son maître Barrow. Leibniz s'occupait de la détermination des tangentes par des méthodes semblables à la différentiation, comme déjà l'avaient fait plusieurs autres géomètres. Il avait aperçu quel intérêt présentent les *problèmes inverses des tangentes*, ceux qu'il allait plus tard exprimer lui-même par les équations différentielles. C'est pour résoudre ces problèmes

---

1) Les nos 14—24 du *Commercium epistolicum* montrent qu'il a donné du moins un grand nombre de communications écrites sur les autres résultats principaux. Ces communications, qui ont fourni surtout des suggestions fécondes à Gregory, prouvent que le dépôt du manuscrit chez Collins était une espèce de publication.

qu'il savait tirer parti de la connexion, observée aussi par lui, de la différentiation et de la quadrature, non pas en s'en servant comme Newton pour créer un méthode nouvelle de quadrature [1]), mais au contraire pour réduire à des quadratures les divers problèmes qu'il se posait. Quant à celles-ci, il se contentait des résultats déjà connus ou acquis plus ou moins fortuitement.

Cependant, dans deux de ses recherches, il se rapproche assez des considérations de Newton. L'une est relative aux développements en série servant à la quadrature du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole, développements dont il avait déjà communiqué en 1674 à Huygens les principaux résultats, et qui furent l'objet de communications ultérieures à Oldenburg en 1675 et 1676 [2]). Lorsque, dans le but d'obtenir un tel développement, il transforme l'intégrale (l'aire) $\int\sqrt{2rx-x^2}\,dx$ en $\int\frac{8r^5z^2dz}{(r^2+z^2)^3}$, on serait tenté de regarder cette transformation comme un pas vers la méthode que nous venons d'attribuer à Newton; mais elle n'est pas faite par une substitution. Elle résulte de l'expression géométrique de l'élément $y\,dx$ à l'aide d'une nouvelle variable z définie géométriquement. La véritable analogie avec les recherches de Newton, c'est le développement en série infinie

$$\operatorname{arc\,tg} t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \ldots,$$

série trouvée antérieurement par Gregory, mais retrouvée et étendue par Leibniz aux ellipses et aux hyperboles. Quand même Leibniz n'aurait pas trouvé ce résultat tout à fait comme il l'expose dans un manuscrit conservé [3]), sa méthode

---

[1]) Cependant il y a songé. Il dit dans un manuscrit de 1674, cité par M. Gerhardt à la p. 57 de son livre *Die Entdeckung der höheren Analysis*: «*Aio ex methodo tangentium inversâ sequi figurarum omnium quadraturas, atque ita scientiam de summis et quadraturis, quod ante a nemine ne speratum est quidem, analyticam reddi posse.*»

[2]) Voir *Leibnizens mathematische Schriften* I, p. 116.

[3]) Voir p. ex. Cantor III, p. 77.

a dû ressembler beaucoup à celle qu'expose Newton dans l'*Analysis per æquationes infinitas*; mais ici Leibniz imite Mercator, qui avait obtenu par le même moyen la série exprimant $\log(1+x)$: il n'imite pas Newton.

La seconde des recherches auxquelles nous venons de faire allusion a eu pour résultat la communication orale que Leibniz a faite à Tschirnhaus, pendant leur séjour à Paris en 1675, sur le problème de trouver des courbes carrables. Ce problème est identique à celui que se pose Newton dans l'addition à l'*Analysis per æquationes infinitas*, et qui fait la base de sa quadrature des courbes, et, généralement parlant, la solution indiquée par Leibniz est la même que celle de Newton. Il égale en effet l'ordonnée y de la courbe cherchée au quotient différentiel $\frac{dz}{dx}$ de l'ordonnée z d'une autre courbe qui correspond à la même valeur de l'abscisse x. Seulement $\frac{dz}{dx}$ est représenté par le rapport de z à la sous-tangente (c'est la forme qu'on donnait alors à la détermination des tangentes). Il est vrai que la rédaction écrite de cette communication [1]) date d'une époque où Leibniz connaissait mieux la méthode de Newton; mais celle qu'il donna en 1675 à Tschirnhaus a dû tout au moins dépendre du même principe. Cependant il ne semble nullement avoir essayé alors d'en profiter, comme Newton, d'une manière systématique pour créer une véritable théorie des quadratures ou des intégrations. Nous allons voir, en effet, qu'en 1676 il ne s'était pas même élevé à un usage systématique de la différentiation des fonctions explicites, opération par laquelle il fallait commencer en tout cas. Néanmoins, étant théoriquement en possession du principe de la méthode de Newton, Leibniz était sur le point de la réinventer; du moins il était excellemment préparé à la saisir au moyen d'allusions assez légères. De même ses propres études sur les séries devaient le disposer à tirer des

---

[1]) Leibniz IV, p. 480—481; Cantor III, p. 144.

suggestions des communications qu'Oldenburg avait en 1674 commencé de lui faire sur les développements de Newton et de Gregory[1].

Les communications directes de Newton à Leibniz ont commencé par une lettre du 13 juin 1676. Cette lettre est adressée à Oldenburg, qui l'envoya à Leibniz le 26 juillet. Elle contient la réponse à une question de Leibniz sur l'établissement des séries représentant $arc \sin x$ et $\sin x$ qu'il savait avoir été trouvées par les géomètres anglais[2]. En retour il promettait de communiquer sa démonstration de la série qui représente $arc\,tg\, x$.

Newton avait obtenu les séries en question, dans son *Analysis per æquationes infinitas*, par des applications particulières de la méthode générale dont il y fait usage. La question de Leibniz — ainsi que la satisfaction que lui causa la réponse de Newton, et qu'il a exprimée par une remarque ajoutée sur la lettre elle-même[3] — confirme donc entièrement la supposition de M. Cantor que Leibniz ne connaissait pas encore ce mémoire. Une réponse complète aurait demandé de la part de Newton une récapitulation des principales parties de son travail. La tâche de Newton devenait même plus difficile par le désir qu'il avait de communiquer aussi de nouveaux résultats et des améliorations récentes. Newton abrège donc l'exposé de la question en omettant toute démonstration des développements en série des fonctions algébriques, et en y substituant un simple énoncé de la série du binôme. La richesse de résultats et l'indication de la marche à suivre, aussi claire que le permettait le désir d'en montrer en même temps la

---

[1]) Voir la lettre d'Oldenburg du 8 décembre 1674 (*Leibnizens mathem. Schriften* p. 56—57) et les lettres de 1675.

[2]) Les deux séries lui avaient été communiquées par Oldenburg dans une lettre du 15 avril 1675 (*Leibnizens mathematische Schriften* p. 61; *Newtoni Opuscula* p. 302).

[3]) *Leibnizens mathematische Schriften, herausg. v.* Gerhardt, I, p. 104.

grande portée, ont satisfait, du reste, Leibniz, qui était déjà familier avec l'application des séries aux quadratures, plus qu'elles n'ont satisfait M. Cantor [1]). Il n'aura pas été impossible par exemple à Leibniz de rétablir d'après les indications de Newton la déduction du développement de l'*arc sin* $\frac{x}{r}$, c'est-à-dire de l'arc d'un cercle de rayon r dont le *sinus* est égal à $\frac{x}{r}$. Il lui a été facile de voir géométriquement au moyen de son triangle caractéristique que l'élément ds de cet arc est égal à $\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$. En appliquant le théorème du binôme, on trouve

$$\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} = 1+\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{r^2}+\frac{3}{8}\,\frac{x^4}{r^4}+\frac{5}{16}\,\frac{x^6}{r^6}+\ldots$$

et ensuite par la quadrature déjà bien connue des paraboles

$$arc\,sin\,\frac{x}{r} = x+\frac{1}{6}\,\frac{x^3}{r^2}+\frac{3}{40}\,\frac{x^5}{r^4}+\frac{5}{112}\,\frac{x^7}{r^6}+\ldots$$

Une application du théorème du binôme et des quadratures des puissances $x^{\frac{r}{2}}$ conduit de même à l'expression indiquée par Newton pour l'*arc sin. verse x*. Il semble plus difficile de retrouver la démonstration qu'a donnée Newton du développement de *sin x*, démonstration qui dépend évidemment de son inversion des séries. Il est vrai que dans sa lettre Newton n'indique qu'indirectement, par un exemple de la solution d'une équation algébrique au moyen d'une série, comment il effectue cette inversion; mais la réponse de Leibniz du 27 août 1676 [2]) montre que celui-ci avait saisi assez bien la manière d'exécuter ces inversions pour déduire la série représentant e^x de celle qui représente $log(1+x)$, et pour trouver la série représentant $cos\,x$, résultats dont Newton était du reste déjà en possession: le premier se trouve en effet dans son *Analysis per æquationes infinitas*, et le dernier, sous forme d'une série exprimant *sin. verse x* dans la lettre même à laquelle répond Leibniz.

---

[1]) III, p. 174: *Von Ableitungen oder Beweisen ist nichts zu finden.*
[2]) Leibniz t. I, p. 114 et s.

La manière complète dont Leibniz a compris la lettre de Newton se montre aussi clairement que possible par les questions qu'il lui adresse encore dans la réponse que nous venons de citer, et qui ont pour objet précisément la démonstration qui y manque du théorème du binôme, et la manière dont on peut trouver les termes de la série exprimant une racine d'une équation algébrique, ou de celle qui sert à l'inversion d'une autre série. Dans sa seconde lettre Newton lui fournit d'une manière très complète les renseignements demandés.

Avant d'en dire plus long sur cette seconde lettre de Newton (du 24 octobre 1676), nous devons parler de suggestions plus indirectes venues de sa part à Leibniz en même temps que sa première lettre. Oldenburg fit suivre cette lettre d'une autre où il informait [1]) Leibniz qu'en 1672 Newton avait écrit à Collins qu'il était en possession d'une méthode très générale servant à déterminer les tangentes aux courbes algébriques, que cette méthode servait aussi à la détermination des courbures, à la quadrature, à la rectification et à la détermination des centres de gravité, et enfin qu'elle n'était pas restreinte aux équations de forme rationnelle. Cette communication devait intéresser Leibniz premièrement à cause des rapports que la méthode des tangentes de Newton pouvait avoir avec la sienne. En même temps il devait être curieux: 1° de connaître les rapports de cette méthode avec les quadratures et les opérations qui s'y réduisent, et 2° de voir comment grâce à elle on surmontait les difficultés résultant des expressions irrationnelles. Il ne nous paraît pas même invraisemblable que sa courte visite à Londres en octobre 1676 ait eu pour but d'être admis à jeter les yeux sur les manuscrits déposés par Newton chez Collins. Nous avons déjà dit qu'il fut même autorisé à faire des extraits de l'*Analysis*

---

[1]) Leibniz I, p. 91.

per æquationes infinitas. D'un autre côté nous ignorons si en même temps il a pris connaissance de la lettre de 1672 de Newton à Collins dont nous venons de dire un mot; on a même dit que, par l'intermédiaire de Tschirnhaus, il en aurait entendu parler dès 1675.

Leibniz fait voir par sa réponse à la seconde lettre de Newton (à celle du 24 octobre 1676 dont nous n'avons pas encore rendu compte) jusqu'à quel point la curiosité que nous venons de lui attribuer à été satisfaite par les renseignements trouvés à Londres et par les résultats de ses propres recherches suggérées par la communication d'Oldenburg. La réponse est en effet écrite, ou du moins commencée, le jour même de l'arrivée de la lettre de Newton, lettre trop longue et trop riche d'idées et de résultats pour permettre même à un Leibniz d'y pénétrer si vite. Leibniz s'est donc hâté avant tout de communiquer ce qu'il avait inventé avant l'arrivée de la lettre à laquelle il avait l'air de répondre.

Il commence[1]) par exposer sa méthode des tangentes, avec la notation des différentielles que nous employons aujourd'hui. Nous avons déjà dit que, selon nous, il était en possession de cette méthode, qui ne diffère que par les nouvelles notations de celles d'autres géomètres, avant d'avoir subi l'influence de Newton. Leibniz ajoute que cette méthode doit être identique à celle de Newton, ce qu'il conclut du fait que — conformément aux renseignements d'Oldenburg — elle s'applique aussi aux quadratures; car toute figure est carrable qui dépend d'une équation différentielle, c'est-à-dire que toute courbe est carrable dont l'ordonnée s'obtient par une différentiation. Cette remarque de Leibniz lui a été rendue plus facile par la connaissance qu'il avait acquise de l'*Analysis per æquationes infinitas.* L'appendice de ce mémoire, dont nous avons parlé, lui aura montré immédiatement que l'opération

---

[1]) Leibniz t. I, p. 154 et s.

dont se sert Newton pour trouver des courbes carrables ne diffère pas de sa différentiation — ce qu'il lui était assez facile de reconnaître parce qu'il en avait fait lui-même un usage semblable dans ses conférences avec Tschirnhaus. — Il aura compris ensuite que Newton avait pu sur cette opération fonder toute une théorie des quadratures.

Leibniz semble avoir été moins heureux sur l'autre point que nous avons signalé dans les communications d'Oldenburg, savoir l'application de la méthode des tangentes, ou bien de sa propre différentiation, à des équations qui contiennent des radicaux. L'*Analysis per æquationes infinitas* n'en donne qu'un seul exemple: la différentiation de $\sqrt{a^2+x^2}$. Serait-ce à cet exemple que Leibniz doit la règle de différentiation qu'il applique dans la lettre en question à la différentiation des radicaux? Il pose

$$d\sqrt[n]{x} = \frac{dx}{n\sqrt[n]{x}},$$

ce qui est correct pour les racines carrées. L'application réitérée de cette règle aux différents radicaux qui se présentent dans sa lettre indique qu'il ne s'agit pas ici d'un simple *lapsus calami* dû à la précipitation de sa réponse. D'autre part, cette précipitation est pour quelque chose dans cette méprise; car Leibniz dit expressément qu'il effectue la différentiation des radicaux par une extension de la règle de différentiation des puissances à exposant entier et positif [1]), extension qui aurait dû le conduire au résultat correct.

On pourra peut-être expliquer la méprise de la manière

---

[1]) . . . *generaliter si sit aliqua potentia aut radix* x^z *erit* $dx^z = zx^{z-1}dx$. *Si* z *sit* $\frac{1}{2}$ *seu si* x^z *sit* $\sqrt[2]{x}$, *erit* dx^z *seu hoc loco* $d\sqrt[2]{x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ *seu* $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$, *ut notum aut facile demonstrabile. Sit jam binomium(?) ut* $\sqrt[3]{a+by+cy^2}$ *etc.: quæritur* $d\sqrt[3]{a+by+cy^2}$ *seu* dx^z, *posito* $\frac{1}{3} = z$ *et* $a+by+cy$ *etc.* $= x$. *Est autem* $dx = b\,dy + 2cy\,dy$ *etc. Ergo*

suivante. Leibniz connaissait la différentiation des racines carrées, dont l'*Analysis* de Newton contient un exemple. Il appelle expressément cette différentiation *facile demonstrabile.* Il avait essayé d'étendre cette règle à des racines d'indice quelconque de la manière que nous avons indiquée; mais il n'avait pu évidemment démontrer cette extension erronée. C'est alors qu'il reçoit la lettre de Newton du 24 octobre 1676. Les premières pages lui font voir tout de suite que la même généralisation qui avait conduit Newton des expressions connues de puissances de binômes à exposants entiers et positifs à la formule générale des binômes doit servir aussi à généraliser les expressions des différentielles de puissances. La démonstration rigoureuse de la formule de Newton allait permettre aussi de démontrer rigoureusement cette extension. Heureux de voir ainsi confirmée sa supposition sur la possibilité d'obtenir les différentielles des radicaux par une généralisation, Leibniz n'a pas pris le temps de remarquer que la généralisation suggérée par Newton, qui se confirme pour les racines carrées, n'est pas identique à celle qui l'avait conduit lui-même à une différentiation des racines d'indice supérieur. Une telle méprise ne pouvait évidemment durer longtemps. Les extraits publiés des papiers de Leibniz montrent aussi que, presque immédiatement après sa réponse à Newton, il savait très bien différentier les quantités irrationnelles [1]. Cependant ces extraits ne contiennent rien sur la démonstration de cette différentiation.

$$dx^2 \ seu \ \frac{dx}{3\sqrt[3]{x}} \ erit = \frac{bdy + 2cydy \ etc.}{3\sqrt[3]{a+by+cy^2}}$$ (Leibniz I, p. 155—156).

Nous avons modernisé un peu les signes, notamment en substituant le signe $=$ au signe d'égalité dont se sert Leibniz. Nous avons aussi corrigé deux lettres manifestement erronées, du moins dans le texte de Gerhardt. La lettre contient encore deux applications de la fausse règle.

[1]) Gerhardt: *Die Entdeckung der höheren Analysis; Beilage* V, p. 143 et s. Le premier de ces extraits est daté du 11 juillet 1677; tandis que nous ne connaissons pas la date exacte de la réponse de Leibniz.

Nous n'osons pas insister sur l'explication hypothétique que nous avons donnée ici des erreurs commises par Leibniz [1]) dans sa lettre; mais en tout cas le défaut de toute preuve autre que la généralisation de résultats connus rend vraisemblable que la différentiation des radicaux a été suggérée à Leibniz par les communications de Newton sur la formule du binôme, soit qu'il en eût déjà conçu l'idée d'après la première lettre, soit que la dernière lettre seulement l'eût porté à imiter la manière dont Newton avait généralisé sa célèbre formule. Cette seconde lettre commence en effet par les explications de Newton sur la manière dont il a trouvé cette formule, explications dont nous avons déjà parlé.

Il résulte de ce que nous avons dit sur le traité *De quadratura*, dont il possédait en 1676, depuis longtemps déjà, les résultats principaux, que Newton connaissait alors très bien la règle générale de la différentiation des radicaux, règle qui est la base de la démonstration de ces résultats.

Leibniz donne, du reste, dans ses deux lettres des preuves très notables de l'habileté avec laquelle il savait traiter certaines équations différentielles à une époque où il ne possédait pas encore une théorie des quadratures ou un calcul intégral propre à donner des vues générales sur les questions de cette nature. Les communications que lui fait Newton sur les quadratures dans sa seconde lettre (du 24 octobre 1676 [2])) devaient pour cette raison lui être très précieuses. Nous avons déjà dit, en

---

[1]) La précipitation de Leibniz se trahit encore dans sa lettre par une autre erreur. Je suppose du reste qu'en réponse aux conclusions que j'ai tirées des fautes commises par Leibniz dans une lettre écrite à la hâte, on m'objectera les fautes qu'on a attribuées à Newton et qu'il aurait commises dans des ouvrages dont il a toujours différé la publication. On répondra de la manière la plus simple à ces objections en discutant les fautes qu'on impute au grand géomètre anglais. On trouvera alors que la plupart de ces prétendues fautes dépendent de malentendus de la part du critique. Nous renvoyons à cet égard à notre prochaine Note.

[2]) *Newtoni Opuscula* I, p. 328—357

parlant des quadratures de Newton, que cette lettre donne — sous la forme dont on se servait alors, c'est-à-dire en disant quadrature là où nous disons intégration — les conditions de l'intégrabilité en termes algébriques des différentielles binômes. Ces conditions se présentent comme conséquences de la règle de formation des séries, en général infinies, qui représentent les intégrales. Newton ajoute que, dans les cas où les séries deviennent infinies, on peut réduire les intégrales à des quadratures de types fixes telles que celles des sections coniques. Il illustre ces communications par de nombreux exemples comprenant aussi la réduction d'autres quadratures à ses intégrales de différentielles binômes.

Ces communications si riches d'idées devaient donner à Leibniz tout au moins de puissantes suggestions. Les lacunes des démonstrations devaient être faciles à combler par la connaissance des résultats; car nous avons déjà vu que Leibniz savait (ou du moins aurait appris par l'appendice de l'*Analysis per æquationes infinitas*) que le résultat d'une quadrature se vérifie par une différentiation. Il est vrai que cette différentiation devient un peu plus difficile dans le cas actuel où les intégrales sont exprimées par des séries; mais les nombreux renseignements sur l'application des séries qu'il avait recueillis à cette époque devaient l'aider à lever en grande partie cette difficulté. Les essais de vérification pouvaient même le conduire à appliquer à la déduction de ces séries la méthode des coefficients indéterminés, méthode que Newton se contentait de consigner dans un anagramme [1]), qui indique aussi, comme le dit Newton, l'application de la même méthode aux équations différentielles [2]). Il va sans dire que Leibniz devait être poussé avant tout à essayer de retrouver les mêmes résultats par ses propres procédés. Les notes qu'il a ajoutées sur la

---

1) *Opuscula* I, p. 356.
2) *Inversa de tangentibus Problemata.*

lettre de Newton montrent[1]) qu'il a retrouvé l'intégration en termes algébriques dans le cas où elle est possible, et en d'autres cas la réduction à des intégrales plus simples, par la substitution dont nous nous servons aujourd'hui.

La lettre de Newton contient encore: une remarque sur l'usage des quantités négatives à l'occasion des deux séries différentes que Leibniz avait cru nécessaires pour représenter e^x suivant que le nombre dont x désigne le logarithme est $\gtrless 1$; des remarques sur la rapidité de la convergence des différentes séries et sur leur commodité au point de vue du calcul numérique[2]); des indications sur le procédé dont Newton s'est servi plus tard dans sa *Methodus differentialis* (l'interpolation) pour trouver des quadratures approchées, en substituant des courbes plus simples à celles qu'il faut carrer, etc.

On voit l'importance des communications contenues dans les deux lettres de Newton. Nous insisterons ici sur celles qui ont eu une influence importante sur la création du calcul différentiel et intégral de Leibniz, si peu différent au fond du calcul des fluxions de Newton:

1° Les communications sur la formule du binôme et sur la manière dont Newton en avait conçu la première idée; elles ont, en effet, conduit Leibniz à la différentiation des quantités irrationnelles;

2° Les communications complètes sur l'application des séries aux quadratures et sur la multitude de nouvelles séries qui en résultent; on sait en effet quel rôle considérable l'application des séries joue aussi dans le calcul intégral de Leibniz;

---

[1]) Leibniz I, p. 128.

[2]) C'est dans cette lettre que Newton a trouvé qu'il faudrait mille ans pour calculer 20 décimales de $\frac{\pi}{4}$ par la série de Leibniz (*Newtoni Opuscula* I, p. 345). On voit donc qu'il avait en vue aussi l'usage pratique des séries.

3° Les communications sur une classe très importante de quadratures; elles ont certainement fourni un excellent point de départ pour le développement des méthodes d'intégration.

Après des communications d'une telle étendue, d'une telle nouveauté, d'une telle portée, il me semble quelque peu injuste de demander que Newton ait donné encore d'autres renseignements sur ses recherches infinitésimales. La première question de Leibniz avait pour objet les séries servant à la quadrature ou à la rectification du cercle. Newton lui répond en lui communiquant en outre une foule d'autres séries obtenues par le même procédé. Ayant négligé d'indiquer en même temps toutes les démonstrations nécessaires, il y revient, à la prière de Leibniz, dans sa seconde lettre; il ne se contente pas de communiquer les démonstrations; il donne aussi des renseignements sur sa conception des idées. Il en multiplie les applications et discute les différentes remarques faites par Leibniz à propos de ses premières communications. Heureux de trouver chez Leibniz une si complète intelligence de ses idées[1]), il se complaît à lui écrire longuement et sa lettre n'en finit pas. Toutefois, comme il ne peut pas lui communiquer tout ce qu'il sait d'intéressant, tout ce qui était déjà consigné dans sa *Théorie des fluxions* et probablement aussi dans son *Tractatus de quadratura*, il faut bien qu'il fasse un choix. Je ne suis pas surpris qu'il ait alors préféré faire connaître avant tout ses résultats, beaucoup plus faciles à exposer que des méthodes nouvelles et très différentes de tout ce qui existait à cette époque. Les résultats qu'il a choisis se rattachent encore de très près à l'objet des communications précédentes. Il donne comme exemples les théorèmes sur les intégrales de différentielles binômes, qu'il a déduits des déve-

---

[1]) Voir le commencement de sa lettre du 24 octobre: *Quanta cum voluptate legi Epistolas clarissimorum virorum D. Leibnitii et D. Tschirnhausii, vix dixerim* etc. *Opuscula* I, p. 328.

loppements en série en cherchant les cas particuliers où les séries s'arrêtent d'elles-mêmes, de façon que les expressions intégrées deviennent finies.

Cependant nous avons déjà montré que ces dernières communications pouvaient conduire sans de trop grandes difficultés à la reconstruction des procédés grâce auxquels il a trouvé une partie de ces résultats et obtenu les séries exprimant les intégrales d'équations différentielles (les fluentes dont les fluxions sont déterminées par des équations contenant en même temps les fluentes). Les courtes allusions qu'il a faites à sa méthode de tangentes et des *maximæ* et *minimæ* pouvaient donner lieu à des suggestions semblables. Il est donc très naturel que Newton ait désiré s'assurer la priorité des méthodes que sa communication pouvait suggérer à d'autres. Il l'a fait en consignant en deux anagrammes [1]) de courts énoncés de procédés dont l'explication aurait demandé à un homme aussi sévère pour lui-même que Newton toute une nouvelle lettre de la même étendue. La franchise avec laquelle Newton communique, en sus de tout ce qu'on lui avait demandé, une foule d'autres vérités aussi intéressantes que nouvelles sans égard au risque d'en suggérer d'autres qu'il ne trouve ni le temps ni la place d'exposer dans sa lettre, cette franchise le lave selon nous de tout soupçon de mesquine cachotterie. Il a montré à cette occasion la même libéralité dont il devait donner plus tard de nouvelles preuves par ses réponses aux questions de Halley sur les lois de Keppler et à celles qu'on lui adressait après l'apparition des *Principes* [2]).

M. Cantor juge autrement que moi la valeur des communications faites à Leibniz dans les lettres de Newton et celle des renseignements que le grand philosophe et géomètre

---

[1]) *Opuscula* I, p. 335 et 356.

[2]) Voir Rouse Ball: *An essay on Newton's Principia*, London 1893, p. 114 et s.

allemand a pu tirer de l'*Analysis per æquationes infinitas.* Il fait par exemple remarquer que dans ce dernier travail il n'y a pas trace de la différentiation des produits et des quotients [1]. Il vante [2] l'exposé clair, loyal et complet que dans sa dernière lettre Leibniz fait de l'application du calcul différentiel à la résolution du problème des tangentes, et tout en essayant d'expliquer pourquoi Leibniz ne communique pas aussi son signe d'intégration, il reproche à Newton de n'avoir pas répondu plus tard à cette lettre par un exposé aussi franc de la théorie des fluxions. Selon M. Cantor c'est à cette théorie que devait recourir Newton pour dévoiler les véritables démonstrations de ses résultats, même de ceux qu'il communique complètement ou qu'il fait entrevoir sans aucun recours direct à cette théorie; ou plutôt, comme il s'agit encore pour notre auteur de savoir si Newton était alors en possession de cette théorie, M. Cantor fait dépendre de l'usage de cet instrument la valeur des recherches elles-mêmes.

La divergence de ce que nous trouvons, M. Cantor et moi, dans les communications réciproques de Newton et de Leibniz, dépend de la différence de ce que nous y cherchons. M. Cantor y cherche principalement l'invention des algorithmes qui ont ouvert une *via regia* aux recherches infinitésimales; de mon côté j'y cherche surtout la découverte des vérités qui donnent la vie aux algorithmes, j'y cherche le travail mathématique nécessaire pour construire avec ces vérités un *substratum* solide à cette *via regia.* Il est vrai que Newton n'énonce pas dans l'*Analysis* les règles de la différentiation des produits et des quotients, règles par lesquelles il faut commencer lorsqu'il s'agit de former un algorithme permettant une exécution mécanique des opérations infinitésimales. C'est ainsi qu'il faut connaître l'algorithme de la multiplication pour

---

[1]) Cantor III, p. 151.

[2]) Ibid. p. 180.

exécuter mécaniquement cette opération; mais, connaissant la définition de la multiplication et l'algorithme de l'addition, on peut trouver par exemple 13×452 sans connaître aucune règle particulière pour l'exécution des multiplications. De même on peut très bien différentier un produit ou un quotient proposé sans aucune règle particulière, lorsqu'on connaît seulement la définition de la différentiation due à Fermat ou à Newton. Fermat différentie les produits sans aucune difficulté. Dans sa courte lettre de 1672 sur la nouvelle méthode de tangentes, Newton se montre même en possession de la règle qui permet d'exécuter cette opération sans recourir à la définition. Cette règle est du reste une conséquence assez immédiate de la définition pour que Leibniz ait pu la tirer de l'appendice à l'*Analysis*, s'il ne l'avait pas connue déjà. En ce qui concerne les quotients, la règle dont se sert Leibniz est aussi facile à déduire de la définition; et l'on voit dans le *Tractatus de quadratura* et ailleurs que Newton les différentie en réduisant le dénominateur à un facteur ayant un exposant négatif. Quant au quantités irrationnelles, nous avons déjà dit que la règle de Leibniz repose uniquement sur l'extension de la notion de puissance, et que cette extension lui avait été suggérée par Newton. Nous ne méconnaissons nullement l'immense avantage qu'il y a à posséder cette règle et à pouvoir en faire usage sans jamais recourir à sa démonstration; mais il ne faut pas oublier que même cet avantage avait été signalé dans la communication faite à Leibniz par Oldenburg.

Cependant nous sommes ici arrivés au point où commencent à se montrer les grands mérites de Leibniz qui ont fini par donner à son algorithme la victoire sur celui de Newton. Leibniz donne les énoncés explicites des règles même les plus simples, tandis que, même dans une œuvre didactique comme la *Methodus fluxionum*, Newton n'énonce pas explicitement les règles de la formation des fluxions des expressions irrationnelles. Il s'applique avant tout à en démontrer rigoureusement les applications en réduisant les équations dont dépendent ces expressions à des formes rationnelles [1]), et il laisse aux lecteurs le soin d'en tirer successivement les règles qui leur permettraient d'exécuter — comme il savait le faire lui-même — les opérations sans recommencer toujours cette même déduction. Nous admirons donc la prévoyance de Leibniz, qui avait déjà introduit les deux signes d et $\int$ dans ses notes personnelles, et qui savait donner aux règles des opérations les plus simples du calcul infinitésimal la forme la plus commode dans un système bien organisé d'algorithmes dès l'instant qu'il savait exécuter lui-même ces opérations. L'auteur de la *Characteristica geometrica*, qui a essayé le premier de créer un calcul représentant les opérations de la logique, a prévu toute l'utilité d'un algorithme infinitésimal à une époque où il n'était en possession que d'une partie assez limitée des vérités qui donnent à cet algorithme son importance supérieure. Si j'ai moins insisté ici sur ces grands mérites, c'est parce que je puis renvoyer à cet égard au livre de M. Cantor, que je cherche à compléter en insistant sur la découverte, un peu trop négligée par lui, des vérités mathématiques qui ont donné une si grande importance aux algorithmes de Newton et de Leibniz.

C'est à ces vérités, et non pas aux algorithmes plus ou moins développés à ce moment, qu'il faut renvoyer lorsqu'on demande la valeur qu'avaient pour Leibniz les communications contenues dans les lettres de Newton, et réciproquement. En effet, les algorithmes permettent, nous l'avons déjà dit, d'exécuter mécaniquement les opérations. La condition

---

[1]) Je ne sais pas pourquoi M. Cantor appelle (t. III, p. 164) ce procédé un *vielleicht nicht ganz erlaubter Kunstgriff*. Comme c'est le procédé le plus naturel pour démontrer cette différentiation si l'on ne veut pas recourir à la formule du binôme, qui doit alors être démontrée antérieurement, ce n'est pas à proprement parler un *artifice*; et quant à la rigueur, il fournit le moyen le plus sûr d'éviter les ambiguïtés qui pourraient provenir de la multiplicité des valeurs irrationnelles.

d'un usage bien assuré de l'algorithme, c'est donc qu'il soit lui-même si bien étudié qu'on connaisse aussi les limites de sa légitimité, s'il y en a, et que dans le cas contraire on se soit bien convaincu de sa généralité absolue. Ceux qui sont précisément le moins disposés à apprécier les algorithmes qu'ils n'ont pas inventés eux-mêmes, et que par conséquent ils ne connaissent pas à fond, ce sont les fondateurs de nouvelles théories. Ayant à lier une idée à une autre, ils ne gagneraient rien en se dispensant momentanément des idées qui font naître une opération. Ils embrassent trop intimement dans leur esprit toutes ces idées pour sentir l'allégement gagné grâce à l'algorithme, et ils trouvent d'autant plus lourd le fardeau qu'impose à leur mémoire tout ce qu'il faut apprendre par cœur pour en faire usage. Ils s'exagèrent même le poids de ce fardeau, n'ayant fait aucun effort sérieux pour le soulever. Nous avons vu, par exemple, dans notre Note précédente que Fermat aime à se passer des progrès de l'algorithme algébrique de son temps, et M. Cantor[1]) montre que Huygens était incapable d'apercevoir les avantages de l'algorithme infinitésimal de Leibniz. Huygens était trop accoutumé à fixer dans sa pensée les moindres détails des belles recherches infinitésimales qu'il a su mener à bonne fin, pour charger sa mémoire d'un appareil destiné à le débarrasser momentanément d'une portion des idées qui font partie intégrante de la recherche. Si tel a été son sentiment à une époque où l'algorithme était déjà assez développé et où son usage avait déjà conduit à des résultats très importants, qu'eût-il dit d'une courte communication, telle qu'on pouvait la faire dans une lettre, sur les algorithmes de 1676? Son intérêt se fût attaché exclusivement aux vérités auxquelles ces algorithmes devaient servir d'organes, et qu'il eût bien été en état de comprendre sans trop réfléchir sur les algorithmes eux-mêmes.

---

[1]) T. III, p. 209.

Il n'est donc pas étonnant que dans ses lettres Newton ait cru que les vérités intéresseraient aussi Leibniz plus que les algorithmes dont il se servait dans ses propres recherches. Que Leibniz ait trouvé superflu de communiquer à Newton l'usage qu'il faisait du signe $\int$ dans ses études personnelles, cela est assez naturel, vu qu'il n'était pas encore en état de prouver l'utilité de ce signe par aucun résultat nouveau et de quelque importance. Il en était autrement pour la notation des différentielles. Elle lui permettait d'exposer assez brièvement sa méthode des tangentes, et il pouvait espérer qu'à cause de l'identité présumée de cette méthode avec celle de Newton, il serait facile à son glorieux correspondant de reconnaître les grands avantages de ces signes. On voit par le célèbre *Scholium* du deuxième livre des *Principes* que Leibniz ne s'est pas trompé à cet égard. Newton y dit que la méthode exposée dans la dernière lettre de Leibniz (1677) ne différait de la sienne que par les dénominations et les notations.

Newton a donc appris en 1677 que Leibniz avait retrouvé les principes de la méthode qu'il possédait depuis longtemps et qu'il avait même consignée en 1671 dans un travail didactique, sa *Methodus fluxionum*; il venait de donner lui-même à Leibniz des suggestions importantes pour utiliser ultérieurement la même méthode en l'appliquant aussi aux recherches de calcul intégral. On croirait donc qu'il se hâta de publier le travail cité et d'assurer ainsi, avec sa propre priorité, le domaine futur de son algorithme, tout aussi commode que celui de Leibniz, et dont les applications s'étendaient alors sur un champ beaucoup plus vaste. Si la forme de son travail, où il s'agissait d'introduire des principes entièrement nouveaux dans la science, ne satisfaisait pas encore le scrupuleux Newton, qui avait peur de toute contestation [1]), il pouvait du moins en confier

[1]) On sait qu'à cause des remarques de Hooke il songeait à garder pour lui le 3e vol. des *Principes*.

une copie à la *Société Royale* ou à un savant ami, comme il avait confié son *Analysis per æquationes infinitas* à Collins. Newton n'en a rien fait. Les seules mesures qu'il ait prises à cette époque en vue d'assurer sa priorité pour les découvertes dont l'exposé complet aurait demandé trop de place, ce sont les anagrammes contenus dans la dernière lettre, et, heureusement, aussi la lettre à Wallis de 1676, qui porte M. Cantor lui-même à reconnaître cette priorité de Newton.

On ne comprend cette réserve qu'en ayant égard au caractère de Newton tel qu'il s'est montré en des occasions semblables. Newton était un géant, qui ne savait pas à quel point ses propres forces étaient supérieures à celles des autres géomètres, et sans doute, après que Barrow eut quitté Cambridge, il n'y trouva personne qui pût lui faire connaître cette supériorité. C'est ce qu'on voit, pour citer un exemple, par l'histoire de l'application qu'il fit des séries aux quadratures, histoire qu'il raconte dans sa seconde lettre à Leibniz [1]. Cette application date des années 1665—1666; mais, ayant appris plus tard que Mercator dans sa *Logarithmotechnia* (1668) avait carré l'hyperbole au moyen du développement de $\frac{1}{1+x}$ en série, Newton crut que cet auteur ou quelque lecteur de son livre devait être en état de développer de même les quantités irrationnelles en série infinie et d'en faire un usage semblable; et pour cette raison il commença de se soucier moins des résultats qu'il avait déjà obtenus lui-même de cette manière.

Même ses grandes découvertes dans l'astronomie physique, il les a gardées pour lui assez longtemps pour faire croire

---

[1]) *Opuscula* t. 1, p. 332—333. Nous en citons en particulier cette phrase: *Sed ubi prodiit ingeniosa illa Nicolaï Mercatoris Logarithmotechnia (quem suppono sua primum invenisse), cœpi ea minus curare; suspicatus, vel eum nosse extractionem radicum æque ac divisionem fractionum; vel alios saltem, divisione patefactâ, inventuros reliqua priusquam ego ætatis essem maturæ ad scribendum.*

qu'il n'en a pas bien vu toute la grandeur. En 1665 ou 1666 [1]) — pendant ses vacances involontaires, causées par une épidémie de peste, et dont il profita pour fonder les principes du calcul des fluxions — il avait vu que la troisième loi de Keppler concorde, pour des trajectoires circulaires, avec une attraction inversement proportionnelle au carré des distances. Une supposition inexacte sur les dimensions de la terre l'a empêché alors d'identifier de la même manière la gravité avec la force qui retient la lune sur sa trajectoire; mais le fait même qu'il savait imaginer des raisons particulières de ce désaccord avec la loi constatée pour le système solaire montre qu'il avait déjà confiance dans la généralité de cette loi. Néanmoins il n'en publia rien alors. En 1679 une correspondance avec Hooke le porta à s'occuper de la question de savoir si la forme elliptique des trajectoires des planètes n'est pas, elle aussi, une conséquence de la même loi d'attraction. Cette supposition se confirma; mais il ne publia pas non plus cette découverte, cette fois peut-être parce qu'il ne voyait pas clairement d'après les lettres de Hooke jusqu'à quel point ce savant se doutait du même fait. C'est seulement en 1684, lorsque Halley s'adressa directement à lui, qu'il chercha de nouveau l'ancienne démonstration qu'il en avait donnée. A cette époque plusieurs savants avaient fait sur la 3e loi de Keppler la même observation que Newton en 1666. Implicitement cette observation est contenue dans la détermination de la force centrifuge par Huygens. On avait même commencé de s'occuper de la question, résolue par Newton en 1679, de la 2e loi de Keppler; mais ni Hooke, ni Wren, ni Halley ne surent démontrer les suppositions qu'on avait à cet égard. C'est alors que Halley se rendit à Cambridge pour demander à Newton son opinion sur cette matière. La bonne volonté avec laquelle

---

1) Voir Rouse Ball: *An Essay on Newton's «Principia», London 1893;* en particulier aux pp. 7, 15, 20, 26.

Newton répondit à ses questions montre que son silence n'était pas dicté par un esprit de dissimulation. Une fois rompu, ce silence fut remplacé, sous la pression amicale de Halley, qui se chargea de toutes les peines et de toutes les dépenses, par une étonnante productivité qui allait bientôt avoir pour fruit le livre des *Principes*.

Ces détails rendent peut-être moins inintelligible le fait que Newton ne fut pas poussé par la dernière lettre de Leibniz à publier immédiatement sa théorie des fluxions. Comme, autrefois, la connaissance de la série de Mercator l'avait dégoûté des recherches sur l'application des séries aux quadratures, on peut s'imaginer avec vraisemblance que son algorithme des fluxions perdit à ses propres yeux beaucoup de sa valeur du jour où il vit Leibniz en possession d'un algorithme semblable. Originairement il a sans doute inventé le sien pour son usage personnel, afin de retenir pendant son travail et de noter ses propres pensées. Ce qui lui donnait de la valeur à ses yeux, c'étaient les importants résultats auxquels il parvenait en s'en servant; mais au commencement il a probablement eu l'intention de publier ses découvertes dans le langage dont se servaient alors ordinairement les géomètres. Une telle pensée semble du moins assez naturelle chez un homme qui voulait avant tout démontrer complètement ses résultats. Pour donner à ses démonstrations toute la sûreté possible, il avait alors à sa disposition les principes éprouvés dans l'antiquité et par ses prédécesseurs de l'âge moderne, principes où tout danger de méprise était prévu. En usant de ses nouvelles notations, il aurait eu besoin non seulement de les expliquer, mais aussi d'en assurer complètement la portée — ce qu'ont négligé plus tard en grande partie les successeurs de Leibniz —. Cette peine n'eût été compensée que par la découverte d'un certain nombre de nouvelles et importantes vérités dont il pouvait simplifier assez les démonstrations au moyen des nouvelles méthodes pour avoir un équivalent du travail consacré à l'exposé de celles-ci. En fait

Newton était déjà arrivé jusque-là, et il avait rédigé en 1671 sa *Methodus fluxionum*, ouvrage qui rendait évidente la fécondité de sa méthode [1]). Néanmoins la communication de Leibniz a pu retirer à Newton un peu de sa confiance dans l'importance de l'invention de l'algorithme qui joue là un si grand rôle. Voyant un autre se servir d'autres notations pour exprimer les mêmes idées, il a pu croire que plusieurs savants

[1]) Ceci reste vrai quand même la rédaction de 1671 n'aurait pas contenu toutes les applications qu'on trouve dans l'édition parue en 1736; ce que suppose M. Cantor (t. III, p. 171), et ce qui est bien possible. Nous avouons du reste que nous ne regardons pas comme absolument convaincant à cet égard le calcul de probabilité que fait M. Cantor. La coïncidence d'une série de matières traitées par Huygens et par Newton s'explique, en effet, assez bien par la connexion qu'ont entre elles ces matières en vertu de leur nature même. M. Cantor concède que la manière dont Newton détermine les centres de courbure est tout à fait différente de celle d'Huygens. La cycloïde était un exemple assez naturel d'une pareille détermination. La simplicité de la construction de son centre de courbure devait frapper un œil aussi exercé aux considérations géométriques que celui de Newton: cet œil si pénétrant a dû apercevoir bien vite la simplicité du lieu de ce centre, ainsi que la propriété de ce lieu de toucher les normales de la première cycloïde. En continuant d'avancer dans cette voie, Newton devait découvrir que cette propriété appartient à tous les lieux des centres de courbure, et qu'elle conduit à une rectification très simple de ces lieux. Lorsque plus tard il chercha des courbes rectifiables, comme il avait déjà cherché des courbes carrables, les développées de courbes données devaient se présenter à lui en première ligne, et, parmi celles-ci, la première courbe algébrique qu'on avait su rectifier, savoir la parabole semi-cubique, développée de la parabole ordinaire.

Du reste, comme Newton ne prétend nulle part, pour sa théorie des courbures, à aucune priorité sur Huygens, qu'il cite au contraire avec vénération dans la proposition LII du premier livre des *Principes*, il est fort probable qu'il doit la première idée de cette théorie à une suggestion de celui-ci; mais M. P. Tannery montre dans son analyse du livre de M. Cantor (*Bulletin de Darboux* 1894, p. 229) que cette suggestion a pu lui parvenir par d'autres voies longtemps avant la publication de l'*Horologium oscillatorium*. Quoi qu'il en soit, Newton cite déjà dans sa lettre à Collins du 10 décembre 1672 (*Opuscula* I, p. 298) les problèmes sur les courbures au nombre de ceux auxquels sa nouvelle méthode est applicable.

avaient à leur disposition particulière des instruments semblables, et qu'alors chacun préférerait le sien, en sorte qu'aucun n'avait chance de devenir l'organe commun de tous les géomètres. Dans ce cas la communication de Leibniz n'a pu contribuer à surmonter la paresse qu'il montrait déjà depuis 1671 à publier son ouvrage [1]).

Il aurait agi autrement, s'il avait prévu aussi bien que Leibniz l'importance universelle de ces algorithmes, s'il avait su voir que la grandeur des résultats qu'ils pouvaient procurer immédiatement à leur inventeur n'était pas la seule mesure de leur valeur, mais que cet inventeur allait prendre sa part de l'honneur de toutes les découvertes qui seraient faites plus tard à l'aide de ces mêmes algorithmes. Newton ne s'est pas montré insensible à cet honneur par la suite, alors que l'algorithme de Leibniz avait commencé de porter des fruits et de montrer son importance universelle, non seulement par les résultats dus au maître lui-même, mais aussi par ceux de ses élèves; mais alors il était trop tard pour que Newton pût donner au sien une popularité semblable; il ne lui restait plus qu'à réclamer la priorité absolue pour l'invention et l'usage qu'il avait faits d'un algorithme aussi bon que celui de Leibniz [2]), et ses amis n'avaient plus autre chose à faire que de discuter — avec plus ou moins de justice — l'influence générale que les recherches de Newton avaient eue sur celles de son rival.

On a souvent agité la question de savoir pourquoi Newton n'a pas profité de l'occasion que lui fournissait la publication des *Principes* de faire connaître sa méthode des fluxions. On a jugé cette occasion d'autant plus naturelle que Newton dit

---

[1]) M. Cantor explique (t. III, p. 189) d'une manière semblable le fait que la communication de Leibniz sur son algorithme n'a pas porté Newton à assurer immédiatement ses droits sur le sien.

[2]) Voir le *Scholium* déjà cité du second livre des *Principes*.

lui-même que c'est au moyen de cette méthode[1]) qu'il a trouvé les propositions les plus importantes des *Principes.* Pour expliquer que néanmoins il a donné dans ce livre la forme ancienne à toutes les démonstrations, on invoque ordinairement la difficulté de faire pénétrer dans le monde scientifique des résultats d'une nouveauté si surprenante: pour faire croire à leur vérité, il fallait des démonstrations satisfaisant à toutes les exigences traditionnelles d'exactitude[2]).

Il y a tout au moins quelque chose d'exagéré dans cette explication. Nous avons déjà vu que non seulement trois savants anglais avaient retrouvé l'explication newtonienne de la troisième loi de Keppler (pour des trajectoires circulaires), explication qui se rattache de très près aux recherches déjà publiées de Huygens[3]), mais que les mêmes savants avaient aussi conçu l'idée d'une connexion analogue entre la 2e loi de Keppler et la loi d'attraction. Tout ce travail précurseur a certainement contribué au bon accueil que la Société Royale de Londres fit immédiatement aux grandes découvertes de Newton, en même temps qu'il explique un peu les réclamations de Hooke.

Ce qui nous semble vrai dans l'explication que nous venons de mentionner, c'est que la nouveauté et l'importance des résultats contenus dans les *Principes* était trop grande pour que l'auteur voulût y joindre l'exposé d'une méthode aussi nouvelle et aussi importante que celle des fluxions. On objectera que l'usage de cette méthode, qui avait conduit, selon Newton lui-même, à la découverte des vérités, en eût facilité

---

1) Nous citerons ici un passage publié pour la première fois dans le livre déjà cité de Rouse Ball (p. 7): *By this Method [of fluxions] I invented the Demonstration of Kepler's Proposition in the year 1679, and almost all the rest of the difficulter Propositions of the Book of Principles in the years 1684, 1685, and part of the year 1686.*

2) Cantor III, p. 192.

3) Voir le *Scholium* de la 4me proposition du premier livre des *Principes.*

aussi l'exposé et la démonstration. Oui, il en eût été ainsi, si Newton s'était adressé à des lecteurs aussi familiers avec la méthode des fluxions que nous le sommes à présent grâce à notre connaissance du calcul différentiel et intégral; mais commencer par fournir de la méthode des fluxions un exposé assez complet pour donner aux démonstrations des propositions de mécanique une base aussi solide que le demandait avant tous les autres Newton lui-même, c'eût été certainement faire un bien long détour.

A l'appui de cette opinion je renvoie premièrement aux remarques que j'ai déjà faites sur l'étendue du travail nécessaire pour donner à la nouvelle analyse infinitésimale un fondement aussi assuré que celui que possédaient déjà les anciennes méthodes géométriques. Pour bien adapter son calcul infinitésimal à ses recherches mécaniques, Newton aurait encore eu besoin d'une géométrie analytique plus développée que celle qui était à sa disposition. Dans une lettre qui nous a été conservée[1]) il indique lui-même les traités de géométrie analytique qu'il faut connaître pour bien comprendre les *Principes*: ce sont les livres de l'inventeur de cette nouvelle science et de ses élèves immédiats. Ils ont pour cette raison le plus grand intérêt; mais ils étaient encore peu commodes pour servir de point de départ aux formules infinitésimales. Pour les coniques du moins, Newton pouvait trouver dans Apollonius une grande richesse de propriétés propres à fournir un appui aux démonstrations infinitésimales, bien plus que dans la géométrie de Descartes. Ce livre, qu'il avait étudié dans sa jeunesse avec un intérêt qui lui fit même négliger pendant quelque temps l'étude des anciens, aura du reste contribué à lui inspirer le goût de généralité qui le porte à ne pas se contenter de la solution des premières questions posées par l'astronomie.

Il ne faut pas, toutefois, exagérer la différence qu'on sup-

---

[1]) Rouse Ball p. 121.

pose exister entre les méthodes personnelles de Newton et les démonstrations publiées dans les *Principes.* Ceux qui attribuent à l'usage de la méthode des fluxions la principale part des succès de Newton, qui lui devrait la découverte des importants résultats exposés dans les *Principes*, ceux-là donneront lieu à des malentendus assez graves si en même temps ils regardent l'algorithme comme l'avantage le plus essentiel de cette méthode. Les géomètres de notre temps sont tellement accoutumés au langage du calcul infinitésimal, si bien adapté à présent à l'expression des vérités mécaniques trouvées par Newton, qu'ils sont trop disposés à oublier le long travail qu'a coûté cette adaptation aux géomètres qui nous séparent du temps de Newton, et l'effort que nous avons fait nous-mêmes une fois pour toutes pour nous approprier l'usage de cet instrument. Le calcul n'est pas une baguette magique, donnée par une bonne fée ou par une heureuse inspiration, et qui ouvre ensuite tous les secrets. C'est un outil assez grossier à l'origine, qui s'est amélioré à mesure que l'ont exigé ses applications. Toutes les fois qu'on a donné à ces applications une direction nouvelle, les premiers pas ont été faits sans son aide, ou du moins par des esprits qui embrassaient assez bien les pensées auxquelles il ne fait que donner une expression concise pour pouvoir se passer de lui. L'adaptation du calcul infinitésimal aux résultats et aux démonstrations consignés dans les *Principes* a contribué infiniment plus au développement de ce calcul lui-même que le calcul des fluxions, tel que le possédait Newton, n'a pu contribuer à la découverte des premiers et des plus importants de ces résultats.

Cette dernière remarque ne s'applique qu'au calcul des fluxions; car, quant à la méthode des fluxions, nous avons déjà rappelé que, d'après Newton lui-même, c'est grâce à elle qu'il a fait ses grandes découvertes. Cela se comprend bien, vu qu'à l'exception des déterminations des coniques par des conditions données contenues dans les 4^{e} et 5^{e} sections du premier livre [1]), toutes les recherches dans les *Principes* sont par leur nature même infinitésimales. La vitesse et l'accélération dans un mouvement curviligne ou variable sont des notions infinitésimales et ne se conçoivent pas autrement; et elles se rattachent aux notions géométriques de tangence et de courbure dont Newton avait traité dans la *Methodus fluxionum.* La première de ces notions mécaniques, celle de vitesse, était même pour Newton presque identique à sa notion infinitésimale fondamentale, savoir celle de fluxion. La méthode des fluxions avait pris ainsi son point de départ dans la mécanique, ce qui facilitait évidemment un retour à la mécanique proprement dite. Newton faisait profiter cette science de tous les résultats déjà obtenus par les applications antérieures qu'il avait faites des fluxions, ainsi que de la faculté qu'il avait acquise d'en faire avec sûreté de nouvelles. Il va sans dire que dans ses recherches personnelles il s'est servi aussi, là où il en avait besoin, des notations qu'il avait attachées à cette méthode et de toutes les facilités particulières que permet un long exercice; mais n'ayant pas publié ces procédés et n'en ayant pas démontré l'exactitude, il devait s'en passer dans son livre. Néanmoins, autant que je sache, l'étude soigneuse qu'on a faite des papiers laissés par Newton n'a pas mis au jour une seule démonstration plus étroitement liée au calcul des fluxions que celles qu'on trouve dans les *Principes.* C'est donc à ces dernières qu'il faut s'en tenir pour retrouver les

---

[1]) Il nous semble assez vraisemblable que la 5e section tout au moins soit le fruit de recherches antérieures. Nous avons, en effet, déjà rappelé que, dans sa seconde lettre à Leibniz, Newton a mentionné la détermination d'une courbe par des points donnés comme un moyen de quadrature approchée. Dans les *Principes* ces constructions deviennent des constructions de trajectoires des planètes. L'existence antérieure de telles parties dans les *Principes* contribue à expliquer la rapidité avec laquelle Newton a pu écrire cette grande œuvre. L'extension de la propriété des développées des cycloïdes due à Huygens aux épicycloïdes et hypocycloïdes (*Principia* I, 49—51) est un autre exemple de théorèmes que Newton connaissait déjà et qu'il a saisi cette occasion de publier.

idées qui l'ont conduit à la découverte de nouvelles vérités. Leur eût-il même donné une autre forme dans ses recherches personnelles, l'esprit qui sut créer cette forme ne l'a certainement pas séparée de la pensée qu'elle exprime. Pour soutenir l'opinion que Newton aurait trouvé d'abord ses résultats par le calcul et y aurait ensuite substitué une démonstration géométrique, et pour avoir ainsi une sorte d'explication des grands résultats auxquels il est parvenu, il faudrait montrer, au moins par un exemple, la possibilité de faciliter ainsi essentiellement la recherche. Mais il faudrait le faire en se servant des seuls procédés de la *Methodus fluxionum*, et non avec les ressources de l'analyse moderne dont l'existence est elle-même le résultat d'un long enchaînement d'idées.

C'est donc dans les *Principes* eux-mêmes qu'il faut chercher les idées de Newton et les avantages qu'il a pu tirer de la méthode des fluxions. Nous nous bornerons à cet égard à quelques remarques.

Newton énonce et démontre dans les lemmes du premier livre de son grand ouvrage les principes infinitésimaux dont il va faire usage dans ses recherches. M. Cantor y voit de légers indices [1]) de la méthode infinitésimale dont il était en possession. Selon nous la place et la forme de ces lemmes s'explique suffisamment par le fait qu'ils constituent le fondement à la fois indispensable et suffisant d'une démonstration exacte des théories qui suivent. Qu'ils puissent en même temps servir de base à un calcul infinitésimal complet, tel que Newton le possédait déjà, ceci est une simple conséquence de l'unité des principes infinitésimaux, soit qu'on en fasse dériver un calcul, soit qu'on donne une forme plus géométrique à leurs applications. Newton énonce ces principes avec beaucoup plus de clarté et de précision que ne le firent plus tard les successeurs de Leibniz, qui regardaient le seul nom d'in-

---

[1]) Cantor III, p 192. *Leise Andeutungen.*

fini ou d'infiniment petit comme une explication suffisante de la notion que ce nom représente [1]).

Fidèle élève des anciens, Newton s'occupe des valeurs limites, qu'il appelle valeurs *dernières* ou *premières*, et il précise l'égalité de deux limites par la condition, énoncée dans son premier lemme, que les quantités qui tendent respectivement vers ces deux limites arrivent à différer l'une de l'autre de moins de toute quantité donnée. Dans un *Scholium* qu'il ajoute aux *Lemmes*, il explique ultérieurement sa notion de limite [2]).

A l'endroit que nous avons déjà cité, Newton dit expressément que c'est par la méthode des fluxions qu'il a trouvé en 1679 la démonstration de la proposition de Keppler (c'est-à-dire des deux premières lois de Keppler). Cette remarque nous autorise plus que toute autre chose à étendre le sens de l'application de cette méthode de la manière que nous l'avons fait. Sa démonstration classique de la première loi de Keppler [3]), qui s'est conservée dans tous nos cours de physique et de mécanique, n'est l'application d'aucun calcul infinitésimal: elle dépend immédiatement des principes qui doivent précéder toute application du calcul. Newton prépare ensuite la démonstration de la seconde loi de Keppler [4]) en déduisant des mêmes principes que la force attractive émanée du centre S

---

[1]) Le *pseudo-infini* dont parle M. Mansion à la p. 22 de son *Esquisse de l'histoire du calcul infinitésimal.*

[2]) M. Cantor attribue (t. III, p. 195) cette explication au dessein d'éviter le mot de *fluxion*, que Newton voulait encore garder pour lui-même. Nous ne voyons pas quel intérêt il pouvait avoir ici à employer ou à celer ce mot. L'explication était également nécessaire, soit qu'il voulût l'appliquer à la limite du rapport de deux quantités qui s'approchent de zéro, et plus particulièrement à la notion mécanique de vitesse instantanée, soit qu'il voulût introduire en même temps la notion de fluxion qui se rattachait à une théorie particulière dont il n'avait pas à parler dans son livre. L'explication de Newton nous semble en tout cas très claire, bien que M. Cantor qualifie ses expressions de *gewunden.*

[3]) *Principia,* 1er livre, prop. I.

[4]) Ibid. prop. VI.

(figure à la p. 252) est proportionnelle à la valeur limite de $\frac{RQ}{t^2}$, PQ étant l'arc parcouru pendant le temps t, et RQ étant le segment intercepté sur le rayon vecteur voisin SQ entre la tangente en P et l'arc. A cause de la première loi, cette force sera donc aussi proportionnelle à la valeur limite de $\frac{RQ}{SP^2 \cdot QT^2}$, QT étant la hauteur du triangle SPQ [1]. Nous ne croyons pas qu'une introduction directe de la notion de fluxion, qui aurait demandé des explications nouvelles sans rendre superflue aucune partie de la démonstration, aurait pu contribuer à simplifier l'énoncé de ces principes.

Pour en venir à l'explication physique de la seconde loi de Keppler [2], il suffit à présent de démontrer que, dans le cas où la trajectoire est une ellipse et S un de ses foyers, la valeur limite de $\frac{RQ}{QT^2}$ est indépendante de la position de P. A cet effet, Newton fait usage des trois propriétés suivantes de l'ellipse:

1°. Le théorème (dit d'Apollonius mais bien connu avant lui) que le rapport du carré d'une demi-corde vQ au produit des segments $Gv \cdot vP$ qu'elle intercepte sur le diamètre correspondant est égal au rapport des carrés $\left(\frac{b_1^2}{a_1^2}\right)$ du diamètre KD $(= 2b_1)$ parallèle à la demi-corde et du diamètre GP $(= 2a_1)$;

2°. L'égalité des parallélogrammes construits sur deux demi-diamètres conjugués et sur les deux demi-axes $(a_1 b_1 \sin \omega = ab)$;

3°. Le segment EP intercepté sur le rayon vecteur SP par le diamètre conjugué du diamètre passant par P est égal au demi grand axe a.

Newton emprunte directement à Apollonius les deux

---

[1]) *Principia* 1er livre, prop. VI, cor. I.

[2]) Ibid. prop. XI.

premières de ces propriétés. Quant à la troisième, qui lui sert à caractériser un foyer, il l'obtient en considérant une droite HI menée parallèlement au diamètre CE par le second foyer H. Alors $EI + IP = \frac{1}{2}(SI + IP + PH) = a$.

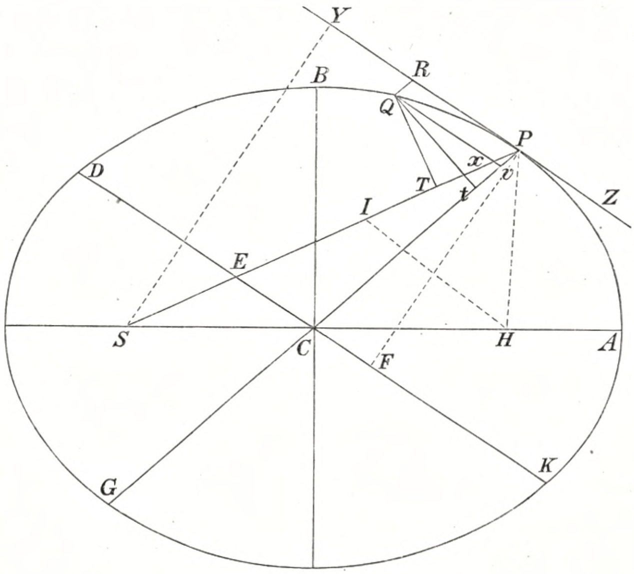

Figure de Newton [1]).

Si nous désignons par x le point où la demi-corde Qv rencontre SP, il résulte: 1° de la similitude des triangles xPv et EPC, et 2° de la première des propriétés citées, que

$$xP = \frac{EP}{CP} \cdot vP = \frac{EP}{a_1} \cdot \frac{a_1^2}{b_1^2} \cdot \frac{vQ^2}{Gv}.$$

D'après les principes infinitésimaux établis dans les *Lemmes*, on peut, dans le cas limite où QR devient parallèle à xP et où R, Q, T, v et x coïncident avec P, substituer QR à xP et xQ à vQ. En même temps Gv devient égal au diamètre GP, ou bien, si nous faisons usage des notations déjà introduites, à $2a_1$.

[1]) *Principia* I, prop. XI.

Le rapport cherché $lim \frac{RQ}{QT^2}$ se transformera donc, si nous désignons par PF la perpendiculaire menée de P au diamètre CD et si nous faisons usage: 1° de la similitude des triangles TQx et FPE, et 2° de la deuxième des propriétés citées $(b_1 \cdot FP = ab)$, de la manière suivante:

$$lim \frac{RQ}{QT^2} = lim \frac{EP}{2b_1^2} \cdot \frac{xQ^2}{QT^2} = \frac{EP^3}{2b_1^2 \cdot FP^2} = \frac{EP^3}{2a^2b^2}.$$

Enfin, si nous faisons usage de la troisième propriété $(EP = a)$, le rapport aura la valeur constante $\frac{a}{2b^2}$ ou $\frac{1}{2p}$, $2p$ désignant le paramètre.

Cette démonstration, qui ne diffère de celle de Newton que par un usage plus complet du langage algébrique, et un peu aussi par l'ordre des déductions, fait voir que, dans le cas où S n'est pas le foyer, la force attractive sera toujours proportionnelle à $\frac{EP^3}{SP^2}$, E étant comme ci-dessus le point d'intersection de SP avec le diamètre conjugué de celui qui passe par P. Cette circonstance a été remarquée aussi par Newton, qui la met en lumière dans sa seconde démonstration. Celle-ci ne différera guère de la première si l'on remonte directement aux principes infinitésimaux et à la similitude des triangles sur lesquels elle est fondée; mais elle prend une forme assez différente par l'usage que l'auteur y fait des solutions de problèmes qu'il a déjà données dans les propositions précédentes. Dans la 7e proposition il avait trouvé la dépendance des attractions émanées de deux points différents qui produisent des mouvements sur la même trajectoire circulaire. En appliquant le résultat trouvé au cercle osculateur de l'ellipse en P, il est en état de déduire l'attraction exercée par un point S de celle qui, émanée du centre de figure, donnerait au point attiré un mouvement sur la même ellipse, et dont il a trouvé la valeur dans la 10e proposition.

Cette seconde démonstration montre le soin avec lequel

Newton a étudié toutes les conséquences de ses principes. Par l'emploi du cercle osculateur, elle fait ressortir aussi la connexion de cette étude avec les recherches consignées dans la *Methodus fluxionum*. Cependant Newton n'a pu faire aucun usage de sa détermination analytique et générale du rayon de courbure, qui revient à la formule $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, pour démontrer la connexion de la seconde loi de Keppler avec la loi générale de l'attraction aussi simplement qu'il le fait dans sa 11^e^ proposition. C'est seulement à l'application des mêmes principes infinitésimaux qu'il s'était déjà exercé par les recherches sur la courbure et par des recherches semblables.

Jusqu'à ce qu'on me montre une autre voie que Newton aurait pu suivre pour parvenir à l'explication des lois de Keppler, en utilisant non seulement les principes infinitésimaux d'une nature générale, mais encore les résultats qu'on trouve dans la *Methodus fluxionum*, je persisterai à croire qu'il a suivi dans cette question la même marche, indépendante de tout *calcul* de fluxions, qu'on retrouve dans ses démonstrations mêmes. Il en est autrement pour les études plus générales sur les mouvements résultant d'attractions qui dépendent autrement de la distance, et sur les forces correspondant à des trajectoires données. Il a découvert les principes généraux qu'il faut suivre en même temps qu'il en trouvait l'application aux problèmes posés par les lois de Keppler; mais ensuite, faisant abstraction de ces applications particulières, il a énoncé explicitement les dépendances générales qui ont lieu entre les lois d'attraction et les mouvements rectilignes ou curvilignes. Pour en trouver les applications aux cas particuliers, on a besoin de la détermination de valeurs limites identiques à des quotients différentiels ou à des intégrales. Il va sans dire que, pour y parvenir, Newton a fait usage des déterminations de ces limites dont il était déjà en possession. Cependant celles dont il a besoin dans les exemples qui se rencontrent dans les *Principes* sont ordinairement assez simples pour le dispenser d'exposer en même temps sa méthode générale des fluxions; mais il déclare expressément qu'une telle méthode sera utile à qui voudra profiter de ses solutions générales; c'est ce qu'il fait en ajoutant à plusieurs problèmes posés dans une forme générale la condition suivante: *la quadrature des courbes étant supposée.*

C'est la même manière de procéder qu'on retrouve dans une autre classe importante de recherches contenues dans les *Principes*, celles sur l'attraction des masses. Tout d'abord, en cherchant l'attraction d'une sphère composée de couches homogènes, Newton n'a à sa disposition aucune formule générale. Il doit appliquer à ce problème particulier des procédés particuliers; mais en même temps qu'il le résout, il découvre les formules ou principes généraux dont dépend la solution de problèmes analogues, et il peut ensuite réduire de nouveaux problèmes à des quadratures.

On ne caractérise donc pas bien les rapports des *Principes* avec les méthodes infinitésimales en fixant principalement l'attention sur le profit que leur auteur a pu tirer de ces méthodes et même du calcul infinitésimal, et en y cherchant des indices de la connaissance qu'il pouvait avoir de ce calcul. En même temps que Newton crée l'astronomie physique et étend puissamment la mécanique rationnelle, il donne une extension aussi considérable au domaine des recherches infinitésimales. Certainement, s'il n'avait pénétré antérieurement jusqu'aux derniers principes infinitésimaux, s'il ne s'était exercé à les appliquer à des recherches analytiques et géométriques dont sa *Methodus fluxionum* contient des preuves si éminentes, il n'aurait pas été en état de faire cette nouvelle conquête; mais, pour commencer du moins, il n'a guère pu faire usage du calcul infinitésimal. Avant d'appliquer cet instrument à la conquête d'un nouveau territoire, il faut connaître celui-ci assez bien pour savoir traduire soit les nouvelles questions dans le langage du calcul, soit, inversement, les résultats analytiques trouvés par l'algorithme, en réponses à ces questions. Cette connaissance une fois acquise par la solution d'un certain nombre de questions mécaniques, on a pu appliquer ensuite le calcul à de nouveaux problèmes au plus grand profit de la mécanique; mais il ne faut pas oublier qu'en même temps Newton ouvre ainsi au calcul infinitésimal un nouveau et vaste champ et qu'il a apporté ainsi au développement de ce calcul une contribution très importante, bien qu'il ne se présente dans les *Principes* que d'une manière indirecte.

Ce sont des contributions de la même nature qu'on doit à celui de ses contemporains que Newton semble avoir le plus admiré, à Huygens, dont les recherches sur la force centrifuge et sur la courbure avaient paru avant celles de Newton; et Huygens n'a certainement appliqué à ses recherches aucune espèce de calcul infinitésimal.

L'étude que nous venons de faire des *Principes* nous a éloigné un peu de la question qui nous occupait, celle de l'influence qu'ont eue sur Leibniz les découvertes de Newton; mais en discutant les contributions les plus importantes de Newton à l'analyse infinitésimale, et principalement celles auxquelles il me semble que M. Cantor ne rend pas suffisamment justice, j'ai dû parler ici de ce livre immortel. Quant aux contributions directes qu'on trouve dans la *Methodus fluxionum*, je me contente de renvoyer aux *Leçons* de M. Cantor, en me réservant toutefois de parler dans une Note subséquente de quelques critiques que l'auteur élève contre plusieurs des recherches de Newton et dont j'espère avoir réussi à montrer le peu de fondement.

Notes sur l'histoire des mathématiques.

Par

H.-G. Zeuthen.

Suite.

(Présenté à la séance du 3 mai 1895).

VI. Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton.

Dans notre Note précédente, nous avons eu plusieurs fois l'occasion d'insister sur l'esprit d'exactitude de Newton et sur les hésitations qui lui ont fait retarder la publication de la plupart de ses œuvres. Il en est résulté une rare correction de tout ce qu'il a fait paraître. Néanmoins plusieurs auteurs modernes lui ont attribué des méprises, des erreurs qui donneraient à tous ceux qui comprennent l'importance qu'elles auraient, si elles étaient réelles, une tout autre image de la solidité de l'intelligence de Newton. Ils est vrai qu'ils excusent ces erreurs, faciles à éviter à présent grâce au développement ultérieur de la science suscité par les découvertes mêmes de Newton, en invoquant la nouveauté des matières et en assurant qu'il n'aurait plus commis de telles fautes après 1700[1]; mais ces excuses, d'ailleurs bien superflues, ne servent qu'à donner une opinion par trop modeste de la clarté avec laquelle les idées nouvelles peuvent se former dans l'esprit de celui qui

[1]) Cantor III, p. 165.

les conçoit. Or cette clarté n'a pas fait défaut à Newton aux endroits critiqués: c'est ce qui apparaîtra facilement aux géomètres qui consulteront ces endroits avec assez de soin. Mais si ces critiques restaient sans contradiction, il y aurait danger qu'elles contribuent à répandre des idées fausses sur l'exactitude d'esprit de Newton. Elles ont même commencé de le faire. En effet, les plus importantes de ces critiques se trouvent dans un ouvrage publié en 1856 par M. Weissenborn[1]), et de là elles se sont propagées jusque dans les *Leçons* de M. Cantor de 1894. Il ne sera donc pas inutile d'essayer d'arrêter cette propagation des reproches peu fondés faits au grand géomètre.

A cet effet, j'ai soumis à un examen attentif toutes les remarques que j'ai trouvées sur des erreurs prétendues de Newton.

Dans un seul cas (le n° 2, dans ce qui suit) Newton s'exprime tout au moins d'une manière inexacte; dans un autre (n° 1) ses considérations manquent de la généralité que nous demandons aujourd'hui; dans les autres il ne dit rien qui soit faux, ou même il donne des explications d'une haute valeur. Il est du reste bien possible qu'on puisse citer des cas où il s'est trompé réellement, car un Newton même peut être sujet à erreur. M. Rouse Ball nous en raconte un exemple très curieux[2]). En essayant de retrouver, à la prière de Halley, son ancienne démonstration de la seconde loi de Keppler, il n'y réussit pas au premier abord, parce que la figure qu'il s'était tracée le portait à regarder comme rectangulaires deux diamètres conjugués différents des axes. Mais de telles fautes ne se seraient pas glissées dans ses ouvrages publiés, non plus,

---

[1]) H. Weissenborn: *Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange als ein historisch-kritischer Beitrag zur Geschichte der Mathematik.* Halle 1856.

[2]) Rouse Ball: *An Essay on Newton's Principia* p. 26.

d'ailleurs, que des fautes telles que lui en attribuent MM. Weissenborn et Cantor.

1. Je commencerai par la discussion de l'exactitude des développements en séries infinies à laquelle j'ai déjà renvoyé dans ma Note précédente (p. 201). M. Reiff[1]) cite complètement, en latin et en traduction allemande, la démonstration que donne Newton, à la fin de son *Analysis per æquationes infinitas*, du développement en série des racines d'une équation algébrique, et il y ajoute la critique suivante: «Il est très essentiel de remarquer qu'il (Newton) sent bien la nécessité de démontrer la convergence des séries; toutefois il le fait d'une manière qu'on ne peut pas approuver aujourd'hui, mais qui suffisait complètement pour son temps, si l'on a égard à l'idée que ses contemporains avaient en fait de rigueur dans les démonstrations mathématiques.»

M. Reiff n'a pas tort. Seulement Newton et ses contemporains méritent bien qu'on se rende un compte précis de ce qui manque à la démonstration de Newton, afin qu'on ne fasse pas trop peu de cas de la rigueur que le XVIIe siècle conservait encore comme un héritage de l'antiquité.

A cet effet je commencerai par rappeler ce que j'ai dit, à l'endroit cité de ma précédente Note, sur la manière dont Newton formait les séries en question dans le travail cité. En écrivant l'*Analysis*, il connaissait bien le théorème général du binôme; mais, sans doute, comme il ne savait pas donner à sa démonstration une forme assez générale, il développait, par la méthode des coefficients indéterminés, les fractions et les radicaux en des séries qui n'auraient été que de simples applications de cette formule générale. Il appliquait ensuite la même méthode au développement des racines des équations. Ce qui manque encore à ses développements c'est la démonstration complète de la loi de formation des termes successifs,

---

[1]) *Geschichte der unendlichen Reihen* p. 30—33.

dans les cas où une telle loi existe; mais la méthode permet toujours de vérifier cette formation pour un nombre quelconque de termes. Nous allons voir que c'est à peu près la même chose qui manque à sa démonstration de la convergence, tandis que sa notion de la convergence est identique à la nôtre.

Newton commence la démonstration qui nous occupe [1]) en énonçant avec une précision parfaite la condition suivante de possibilité d'un développement en série: il doit exister des valeurs de la variable indépendante x assez petites pour rendre convergentes les séries exprimant la variable dépendante y. Sans se servir encore du mot *convergent*, il définit l'idée qu'il renferme par la condition qu'en prenant un nombre assez grand de termes on puisse rendre la différence de la série et de la quantité y à développer plus petite que toute quantité assignable [2]).

Pour démontrer que les séries qu'il obtient par sa méthode de développement satisfont bien à cette condition, Newton fait remarquer que son procédé consiste dans la formation successive de nouvelles équations ayant pour racines, p, q, r, les différences entre les racines y de l'équation donnée et la somme des termes déjà obtenus de la série. Il considère en particulier le *dernier* terme (total) de ces nouvelles équations, savoir celui qui ne contient pas l'incrément cherché, p ou q ou r. Ce terme est un polynôme en x, que nous appellerons ici $\varphi(x)$, et Newton dit que chaque nouvelle approximation en enlève le terme (partiel) qui contient la puissance la plus basse de x. En prenant une valeur assez petite de x, on peut faire en sorte que cette partie enlevée soit plus grande que la moitié de $\varphi(x)$. Alors il résulte du critère de convergence d'Euclide (X, 1) qu'il est possible, en continuant indéfiniment la formation des

---

[1]) *Opuscula* p. 27.

[2]) M. Cantor rappelle (t. II, p. 823) que cette manière exacte d'exprimer une approximation indéfinie est due à Wallis. Cependant il ne faut pas oublier que c'est précisément à cette question que répond la méthode d'exhaustion des anciens.

nouvelles équations, de rendre le dernier terme $\varphi(x)$ aussi voisin qu'on veut de zéro. En même temps une seule des racines cherchées — savoir celle qui correspond à la racine considérée y de l'équation donnée — s'approchera de zéro. Cette approximation peut être poussée aussi loin qu'on le veut. La série formée des incréments trouvés successivement tendra donc à représenter une des racines de l'équation proposée.

On pourrait objecter à cette démonstration que le passage d'une des équations successives à la suivante ne se borne pas à enlever au dernier terme $\varphi(x)$ la partie qui contient la puissance la plus basse de x; mais cette remarque n'a que peu d'importance. En comparant les derniers termes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ de deux équations consécutives, on s'arrangera, en effet, sans aucune difficulté de manière que $\psi(x)$, qui ne contient plus une puissance de x aussi basse qu'en contient $\varphi(x)$, soit plus petit que la moitié de $\varphi(x)$.

Plus importante serait la remarque que le dernier terme en question, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, etc., se compose de termes de plus en plus nombreux à mesure que progresse l'opération, et que, dans le cas de l'inversion d'une série infinie donnée, les équations en y, p, q, r, ... sont de degré infini. On peut craindre dès lors que la valeur de x dont il y aurait besoin pour assurer la convergence, n'ait elle-même pour limite zéro, contrairement à la définition de la convergence. Pour ces raisons on peut contester la généralité à laquelle semble prétendre cette démonstration, que Newton se borne à donner une fois pour toutes; mais elle suffira dans les cas particuliers. Elle suffira évidemment, dans les cas où Newton se contente de la formation d'un nombre limité de termes, pour juger de l'approximation ainsi obtenue; car au moyen des considérations de Newton on peut constater la possibilité de prendre une valeur de x assez petite pour rendre le *reste* plus petit que le dernier terme trouvé de la série ou même plus petit qu'une fraction quelconque de ce terme. Une application des séries de Newton semblable à celles qu'on fait ordinairement, dans le calcul différentiel, d'une série de Taylor dont on ne prend qu'un nombre limité de termes, est donc assez bien fondée. Quant aux séries d'un nombre infini de termes que Newton apprend à former, une démonstration complète de la loi de formation aurait dû précéder la démonstration de la convergence. C'étaient les symboles nécessaires pour démontrer complètement quelque chose sur *le terme général* qui lui faisaient défaut, et non pas une idée rigoureuse de la nature et des conditions générales de la convergence.

2. Nous passons ensuite à une erreur qu'on a déjà reprochée à Newton de son vivant. Dans son traité *De quadratura curvarum* (*Scholium* de la proposition XI)[1] et ailleurs, il déduit de la série

$$(z+o)^{\eta} = z^{\eta} + \eta o z^{\eta-1} + \frac{\eta\eta-\eta}{2} oo z^{\eta-2} + \text{etc.},$$

que $\frac{\eta\eta-\eta}{2} oo z^{\eta-2}$ est l'*incrementum secundum seu differentia secunda* de la quantité z^{η}, etc. Cette erreur était naturellement assez grave aux yeux des élèves de Leibniz, qui devaient identifier l'*incrementum secundum* à $d^2 z^{\eta}$. Newton lui-même l'a reconnue plus tard en ajoutant, sur un exemplaire qu'il donna en 1711 à Nicolas Bernoulli, le mot *ut* exprimant que la valeur citée sera seulement proportionnelle au second incrément[2]. Cependant cette erreur ne décèle chez l'auteur de la *Methodus differentialis* aucune ignorance sérieuse de la véritable nature des différences d'ordre supérieur. Ce n'est pas, en effet, l'*incrementum secundum* qu'il a défini rigoureusement à l'endroit qui fait l'objet de la critique, mais la *fluxio secunda*, et de celle-ci il dit fort justement qu'elle est proportionnelle à la quantité *nascens* qu'il avait égalée à $\frac{\eta\eta-\eta}{2} oo z^{\eta-2}$.

---

[1] *Opuscula* I, p. 241—242.

[2] *Commercium epistolicum* II, p. 310; voir aussi Gerhard: *Die Entdeckung der höheren Analysis* p. 89.

3. J'ai déjà dit[1]) que MM. Weissenborn et Cantor ne partagent pas mon admiration pour l'usage que Newton fait de la liberté du choix de la variable indépendante. Cependant, comme ils ne précisent pas leur critique à cet égard, je ne sais pas bien à quoi répondre. Cette critique semble être le résultat de quelque malentendu sur la notion de fluxion, le même, probablement, qui les porte[2]) à prendre l'équation

$$2\dot{x} - \dot{z} + \dot{y}x = 0$$

pour une équation aux différences partielles, et à critiquer la manière dont Newton l'intègre. Cette équation est une équation différentielle totale, la même qu'on écrirait à présent

$$2dx - dz + xdy = 0,$$

et comme elle ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité par une seule équation, il est impossible de l'intégrer autrement que par deux équations dont l'une peut être choisie arbitrairement. Voilà précisément ce que fait Newton[3]) en indiquant le résultat qu'on obtient par un choix particulier ($x \doteq y^2$), qui d'ailleurs pourrait être remplacé par tout autre.

4. MM. Weissenborn[4]) et Cantor[5]) critiquent la règle dont se sert Newton pour trouver l'intégrale $\int(Mdx + Ndy)$, où M et N sont des polynômes en x et y, ou bien pour intégrer immédiatement l'équation

$$M\dot{x} + N\dot{y} = 0.$$

Newton en intègre séparément chaque terme, en regardant y ou x comme constant suivant que l'intégration a lieu par rapport à x ou par rapport à y, et il efface ensuite de la

---

[1]) A la note au bas de la p. 206.

[2]) Weissenborn p. 39; Cantor III, p. 166,

[3]) *Opuscula* I, p. 83. Newton s'exprime à cet égard avec sa clarté ordinaire: ... *sufficit quamlibet relationem inter binas supponere, cum hæc relatio à statu quæstionis non determinatur.* La seule objection qu'on pourrait faire, c'est qu'il aurait été tout aussi bien permis d'établir la relation arbitraire entre les trois variables qu'entre deux seulement.

[4]) P. 31—33.

[5]) T. III, p. 164—165.

somme une fois chaque terme qui se présente ainsi deux fois (une fois dans $\int M dx$ et une fois dans $\int N dy$). MM. Weissenborn et Cantor font remarquer que cette règle conduirait à intégrer par exemple

$$x^3\dot{x} - 3x^2y\dot{x} + xy^2\dot{y} - y^3\dot{y} = 0$$

par [1])

$$\frac{x^4}{4} - x^3y + \frac{xy^3}{3} - \frac{y^4}{4} = 0.$$

Tout géomètre qui connaît la condition d'intégrabilité de $Mdx + Ndy$ sait qu'ils ont mille fois raison, et que la méthode de Newton ne conduira à un résultat exact que dans le cas où $Mdx + Ndy$ est intégrable; mais en consultant l'endroit critiqué on voit que Newton ne néglige nullement de faire la même remarque [2]). Seulement il l'éclaircit par un autre exemple ($\frac{1}{2}x^2 - yx + ay = 0$ n'est pas l'intégrale de $x\dot{x} - y\dot{x} + a\dot{y} = 0$). On objecterait peut-être encore que l'équation est intégrable même dans les cas où son premier membre ne l'est pas; mais Newton ne s'occupe expressément que de la *solutio peculiaris* des équations qu'on peut intégrer en en intégrant le premier membre.

5. Tandis que dans le cas précédent MM. Weissenborn et Cantor ont reproché à Newton d'avoir oublié une restriction qu'il n'a nullement négligée, il y a un autre cas où ils lui reprochent [3]) de dire quelque chose qui est juste. Newton détermine [4]) les points d'inflexion d'une conchoïde en cherchant les tangentes qui interceptent sur une droite fixe à partir

---

[1]) En négligeant la constante d'intégration, ils ne font qu'imiter l'exemple de Newton.

[2]) *Newtoni Opuscula* I, p. 62. .... *siquidem hoc pacto problema non semper solvi potest. Unum tamen addam, videlicet, quod si, postquam fluentium relationem inveneris hâc methodo, regredi potes per Probl. 1 ad propositam æquationem fluentes involventem, certò noscis opus esse rectum, aliàs non.*

[3]) Weissenborn p. 48; Cantor t. III, p. 168—169.

[4]) *Opuscula* I, p. 91.

d'une origine fixe des segments de valeur *maxima* ou *minima*. M. Weissenborn a vérifié le résultat obtenu pour la conchoïde, mais croit qu'il n'est correct que par un pur hasard; il a même souligné les mots *zufälliger Weise*. Selon M. Cantor cette même détermination décèlerait des idées peu claires (*unklare Vorstellungen*) sur l'inflexion. Néanmoins la règle de Newton est fort bonne, à condition qu'on ne substitue pas avec M. Cantor la sous-tangente au segment intercepté à partir d'une origine fixe. Il n'est pas difficile de s'en persuader, soit au moyen d'une figure, ce qu'a dû faire l'inventeur, soit en déduisant analytiquement l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ de celle qui exprime immédiatement la règle. Celle-ci était même assez naturelle à une époque où l'on déterminait les tangentes au moyen de la sous-tangente, dont on dérive en effet la quantité qui doit être *maxima* ou *minima* par l'addition (ou la soustraction) de l'abscisse du point de contact. Il est vrai qu'à côté des points d'inflexion la règle comporte en général des solutions étrangères, savoir les points d'intersection de la courbe avec l'axe fixe; mais il n'est pas difficile de distinguer celles-ci des véritables solutions au moyen d'une épreuve. Néanmoins pour cette raison l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ est peut-être à préférer[1]; mais elle n'était nullement inconnue à Newton. Non seulement il identifie plus loin[2] le problème de trouver les inflexions avec celui de trouver les points où l'angle de la tangente avec l'axe des abscisses a une valeur *maxima* ou *minima* (ce que M. Cantor appelle *ziemlich richtig*); mais encore il caractérise expressément[3] par $\dot{z} = 0$ ou bien, puisque z est égal à $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, par $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ le *punctum rectitudinis*. Il cite comme exemple de ces points singuliers le sommet de la parabole $a^3x = y^4$, mais il ajoute

---

[1]) On sait du reste qu'elle comporte, elle aussi, des solutions étrangères si l'on a égard à ce qui se passe à l'infini du plan.

[2]) *Opuscula* I, p. 103.

[3]) *Opuscula* I, p. 121.

immédiatement la remarque que les points déterminés de cette manière sont, en général, des points d'inflexion (*Illud idem punctum plerumque est limes flexûs contrarii*). Non seulement donc il connaît la condition $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, mais il sait encore distinguer les points d'inflexion proprement dits de ceux qui ne présentent aucune inflexion visible et dont la parabole qu'il cite fournit un exemple. A cet égard les deux déterminations au moyen d'un *maximum* ou d'un *minimum* ont l'avantage de ne correspondre qu'aux inflexions visibles.

C'est comme application de la théorie de la courbure que se présente cette détermination des points de *rectitude*. Cette théorie comprend, non seulement la pénétrante recherche infinitésimale qui a conduit à l'expression du rayon de courbure au moyen des deux premiers quotients différentiels de y (exprimés par l'algorithme de Newton), mais aussi la détermination du rapport des fluxions du rayon de courbure et de l'arc, rapport qu'il regarde comme mesure de la variation (*inæquabilitas*) de la courbure, et Newton applique ces déterminations à beaucoup de courbes particulières. Il serait difficile de s'imaginer comment Newton aurait pu s'élever jusque-là sans avoir commencé par se faire une idée nette des points d'inflexion. Nous venons de voir qu'il ne se borne pas à y appliquer la méthode que ses critiques semblent regarder comme la seule possible.

6. Au même endroit[1]) où M. Cantor reproche à Newton l'introduction de nouvelles relations arbitraires (voir au n° 3 de la présente Note), il qualifie aussi d'arbitraire un autre procédé de Newton. Celui-ci en fait usage[2]) là où il s'agit d'exprimer l'intégrale d'une différentielle totale ou d'une équation différentielle donnée (représentée par des fluxions) au moyen d'une série de puissances. Newton évite alors dans la série à intégrer les termes de la forme $\frac{a}{x}$ en remplaçant, dans la

---

[1]) Cantor III, p. 166.

[2]) *Opuscula* p. 70 et ailleurs.

question proposée, x par $b \pm x$. A vrai dire, je ne vois pas qu'est-ce qu'on peut reprocher à Newton à cet égard, et de quelle justification[1]) aurait besoin ce changement de variable ou, si l'on veut, d'origine. C'est du même artifice que les géomètres se servent toujours, soit qu'il s'agisse simplement d'exprimer les logarithmes par des séries de puissances, soit qu'on veuille obtenir une représentation analytique de toute autre fonction qui présente une singularité semblable à celle du logarithme.

7. Nous avons déjà parlé (p. 237, note) de la critique que M. Cantor élève contre l'artifice qui consiste à donner une forme rationnelle à une équation qu'il s'agit d'intégrer.

8. Je citerai encore une remarque de M. Rouse Ball[2]) sur le lemme 28 du premier livre des *Principes*, où Newton démontre l'impossibilité de carrer algébriquement une figure limitée par des droites et par un arc arbitraire d'ovale. Newton fait tourner d'un mouvement uniforme autour d'un point pris à l'intérieur de l'ovale une droite sur laquelle un point se meut avec une vitesse proportionnelle au carré r^2 du rayon vecteur de son point d'intersection avec l'ovale. Le rayon vecteur R de la trajectoire de ce point mobile sera alors proportionnel à $\int r^2 d\vartheta$, ou bien au secteur de l'ovale que la droite mobile a balayé. On voit que, si l'on continue à l'infini ce mouvement, les incréments du rayon vecteur R se répéteront périodiquement à l'infini, ce qui serait impossible si R était une fonction algébrique des lignes trigonométriques de l'angle ϑ. Signalons comme conséquence particulière de cette démonstration (que nous avons rapportée librement, mais sans y changer aucun point essentiel) que les fonctions circulaires sont des fonctions transcendantes. Si dans ce cas on prend pour point fixe le centre du cercle, la trajectoire auxiliaire sera une spirale

---

[1]) . . . *an eine Rechtfertigung dieser Willkür scheint gar nicht gedacht zu sein* (Cantor III, p. 166).

[2]) *An Essay on Newton's Principia* p. 83.

d'Archimède, et il n'est pas improbable que l'idée de cette démonstration ait été suggérée à Newton par les courbes du grand Syracusain.

Le seul défaut de la proposition très intéressante de Newton, c'est celui d'une définition précise des ovales. Afin d'y suppléer, il est nécessaire et il suffit d'avoir en vue la démonstration simple que nous venons de rappeler. Il est supposé, premièrement, que l'ovale dépend d'une seule équation, ce qui a lieu lorsqu'il fait partie d'une courbe algébrique. Newton suppose encore évidemment que l'aire entière peut être balayée par un rayon vecteur variable faisant sans interruption une rotation égale à 2π, et que la loi de la variation du rayon vecteur n'est soumise, pendant cette rotation, à aucune altération subite. Il ne regarde donc comme un ovale ni un contour fermé à arcs rentrants (ou à inflexions) ni une boucle de courbe attachée par un point double à d'autres branches de la même courbe.

On n'aurait du reste besoin que d'une légère extension de la démonstration pour l'appliquer aussi aux courbes fermées à arcs rentrants et même à des contours finis et fermés tracés d'un trait continu et formant des boucles, à la seule condition que l'aire totale limitée par un tel contour ne devienne pas égale à zéro si l'on donne aux différentes parties de l'aire un signe différent, suivant qu'elles se trouvent à droite ou à gauche d'un observateur parcourant le contour toujours dans le même sens[1]. Au contraire la démonstration de Newton ne permet nullement de regarder comme un ovale une seule des parties de cette aire totale, par exemple l'une des deux boucles de la lemniscate. Appeler une telle boucle un ovale ne serait

---

[1]) En combinant la démonstration de Newton à des théories modernes, on en peut même conclure, inversement, que la quadrature d'une partie quelconque de l'aire d'une courbe du genre zéro s'exécute algébriquement dans le cas où l'aire totale est égale à zéro. Cela a lieu, par exemple, pour la lemniscate.

pas non plus conforme à l'usage ordinaire de ce mot dans le cas où la boucle est attachée aux autres parties de l'aire totale par un nœud simple ou par une combinaison de nœuds qui nécessiterait un rebroussement de la direction d'un point parcourant seulement le contour de la boucle considérée. Je m'étonne donc que M. Rouse Ball puisse citer comme exemple de l'incorrection du lemme de Newton la possibilité de la quadrature des courbes

$$y^{2m} = (2n)^{2m} x^{2m(2n-1)} (a^{2n} - x^{2n}),$$

dont les différentes boucles ne sont pas des ovales dans le sens ordinaire de ce mot. Il m'eût semblé plus explicable qu'il imaginât un exemple de courbe dont les deux parties présenteraient du moins à vue d'œil la figure d'ovales. C'est ce qui aurait lieu si les deux branches passant par l'origine étaient tangentes l'une à l'autre; pour établir alors la connexion des deux boucles nécessaire pour l'intégrabilité en termes algébriques, il faut supposer que les deux branches aient entre elles un contact d'ordre pair. Même une courbe carrable de cette nature, par exemple celle que représente l'équation

$$y^2 = ax^{\frac{2}{3}} - bx^2,$$

ne mettrait pas en défaut le lemme de Newton, si l'on a égard à la démonstration, qui défendrait de regarder les deux boucles comme deux ovales.

9. Dans les critiques dont nous avons parlé ici, on a reproché à Newton des erreurs ou des inexactitudes. Il y a d'autres critiques qui ont seulement pour but de montrer les limites de ses procédés, afin de faire ressortir les progrès ultérieurs qu'on doit à Leibniz. Renfermées dans leurs justes bornes, ces critiques contribuent essentiellement à faire comprendre le développement du calcul infinitésimal. A condition qu'on ne prétende pas faire croire que Newton a ignoré les règles de la formation des fluxions des produits, des quotients et des racines, règles qu'il applique au contraire avec une sûreté complète chaque fois qu'il en a besoin, il est juste de

faire remarquer qu'aux endroits où il s'agit de faire connaître ces règles, il les démontre au lieu de les énoncer. Leibniz fait preuve ici de cet éminent esprit pédagogique, qui a fait de lui le créateur de la forme du calcul infinitésimal conservée jusqu'à nos jours, en énonçant nettement ces règles tout d'abord. Connaissant l'utilité actuelle du signe d'intégration, nous devons regarder l'introduction de ce signe dans l'algorithme de Leibniz comme un avantage sur celui de Newton, avantage que, néanmoins, il ne faut pas exagérer. Or on tombe dans cette exagération en mesurant cet avantage d'après la commodité qu'il comporte pour les lecteurs modernes qui y sont accoutumés, et en oubliant que la représentation de la même notion par une aire correspondait mieux aux besoins d'une époque où l'on étudiait les fonctions sous la forme des courbes qui les représentent. En cherchant les *fluentes* qui ont une fluxion connue, Newton a même une représentation analytique des intégrales.

Tout en reconnaissant l'importance de ces avantages, qu'on doit à Leibniz, je n'en ai guère parlé dans ce qui précède, parce que cela était superflu. Cette importance, chacun a eu lieu de l'apprécier en apprenant le calcul différentiel et intégral. On l'a proclamée en termes pompeux[1]) et on y insiste dans le livre de M. Cantor, qui sera pour longtemps la principale source de la connaissance de l'histoire des mathématiques. J'ai eu, dans ma Note précédente, beaucoup plutôt besoin de donner à cette reconnaissance d'un fait indéniable le supplément nécessaire, en montrant non seulement que le développement moins complet de la forme et du détail de l'algorithme n'empêcha pas Newton de l'employer aussi librement que Leibniz et ses successeurs, mais de plus que c'est Newton

[1]) Voir par exemple le discours de Hankel (*Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten,* Tübingen 1885, 2e édition) cité par M. Giulio Vivanti (*Il concetto d'infinitesimo*), où il est dit que le seul nom de calcul différentiel et intégral marque la supériorité de ce calcul sur la méthode de fluxions.

qui découvrit les principales vérités mathématiques dont dépend l'utilité de l'un et l'autre algorithme.

A condition qu'on reconnaisse l'importance des contributions particulières apportées au calcul infinitésimal par chacun de ces deux grands hommes, je ne disputerai pas de la valeur respective de ces contributions. C'est en quelque sorte une question de goût. Je n'aurai à m'occuper ici que d'une comparaison entre les deux créateurs du calcul infinitésimal faite par M. Weissenborn, qui méconnaît entièrement les mérites de Newton dont nous avons rendu compte dans la Note précédente, et qui les regarde même comme des détours ou comme des solutions incomplètes.

Ce qui est vrai à cet égard c'est que Newton n'a pas un mot particulier qui corresponde au mot d'intégrale, et ne représente qu'exceptionnellement les intégrales par un signe particulier. Ceci, nous venons de le concéder; mais tout ce que M. Weissenborn lui reproche quant à l'exécution des intégrations, c'est de faire exactement la même chose qu'il aurait faite et qu'il aurait dû faire s'il avait été en possession de ce mot et de ce signe, et encore l'a-t-il fait à une époque où personne ne pensait encore à ces manières d'exprimer les mêmes résultats. Selon M. Weissenborn[1]), c'est par la voie inverse de celle que nous suivons aujourd'hui que Newton trouve, dans l'appendice à l'*Analysis per æquationes infinitas*, la quadrature des paraboles, et s'il procède ainsi, c'est parce qu'il ne connaît pas encore les règles qui servent à déduire la loi des aires de celle des ordonnées. En effet! si nous désignons par x l'abscisse, par y l'ordonnée et par z l'aire, Newton ne dit pas que $z = \int y\,dx$, ce qui ne servirait à rien ni à Newton, ni à nous, qui ne possédons, pas plus que Newton, aucun moyen im-

[1]) P. 22: *Es schlägt also Newton den dem jetzt gewöhnlichen Verfahren entgegengesetzten Weg ein, da er die Regeln, wie aus dem Gesetze der Ordinaten das der Flächen abgeleitet wird, noch nicht entdeckt hatte.*

médiat de trouver les intégrales; mais il dit — dans un langage intelligible alors — que $\frac{dz}{dx} = y$, ce qui lui permet de démontrer que $z = \frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ dans le cas ou $y = x^{\frac{m}{n}}$, et ce qui nous permet à nous de démontrer que $\int y\,dx = \frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ (à condition qu'on choisisse convenablement la limite inférieure de l'aire et de l'intégrale).

C'est le retour de la même critique qu'on retrouve partout où M. Weissenborn parle des intégrations exécutées par Newton. Dans l'ingénieux usage des développées, que fait Newton comme l'avait déjà fait Huygens, pour trouver des courbes rectifiables, M. Weissenborn voit seulement une ressource qui ne permet à Newton de rectifier qu'un certain nombre de courbes, tandis que le problème lui reste impossible pour la plupart des autres courbes [1]). Cela est vrai lorsqu'on a en vue le problème que se posait alors Newton, savoir celui de rectifier les courbes sous forme finie, ou algébriquement; mais de ce même problème il n'existe aucune autre solution aujourd'hui. En effet, lorsqu'on est en état de rectifier algébriquement une courbe, on en pourra déduire algébriquement une développante, qui sera algébrique ou transcendante en même temps que la courbe donnée. A mon sens M. Weissenborn fait tort à Newton en disant que sur ce point la méthode des fluxions le cède *auf das Entschiedenste* à celle de Leibniz, au moyen de laquelle on peut du moins trouver de chaque problème (de rectification) une solution aussi approchée qu'on veut. Dans la méthode de Leibniz, on y parvient en exprimant la longueur des courbes

---

[1]) P. 51: *Es blieb daher Newton nichts übrig, als von allen ihm bekannten Curven die Evoluten zu suchen ... Bei den meisten andern war für Newton die Lösung der Aufgabe unmöglich. Dies ist also ein Umstand, durch den seine Fluxionsrechnung gegen Leibnizens Differenzialmethode auf das Entschiedenste in den Schatten tritt, indem letztere frei von dieser Beschränkung ist und jede Aufgabe, wenigstens bis zu jedem Grade der Genauigkeit, lösen kann.*

par une intégrale dont on peut trouver la valeur approchée à l'aide d'une série; mais avant Leibniz d'autres savants connaissaient la réduction des questions de rectification à des questions de quadrature, et c'est précisément Newton qui a introduit l'usage général des séries à l'effet d'exécuter ces opérations. Il suffit de renvoyer à cet égard aux exemples de rectification que contient déjà l'*Analysis per æquationes infinitas.*

La critique suivante, où M. Weissenborn [1]) reproche à Newton presque toutes les méthodes de quadrature que nous avons admirées au commencement de la précédente Note, n'a pas plus de sérieux. Il est vrai que Newton n'y fait pas même usage de son propre signe d'intégration x'; mais je ne comprends pas sur quel point le seul usage d'un signe d'intégration aurait rendu superflu un seul des procédés dont il se sert pour exécuter les intégrations, ou lui aurait permis d'ajouter une seule quadrature à celles qu'on peut exécuter sans ce signe. M. Weissenborn reproche, par exemple, à Newton de réduire la quadrature d'une courbe à celle d'une autre, par exemple la quadrature de la cissoïde à celle du cercle, et trouve évident que l'intégration directe est préférable à ce procédé indirect. Mais quel procédé plus direct peut-il exister? De quelque manière qu'on exécute la quadrature de la cissoïde, elle demande, sous une forme ou sous une autre, l'introduction des fonctions circulaires, ou, si l'on cherche l'aire totale limitée par la courbe et son asymptote, l'introduction du nombre π. C'est cette introduction qui devait se présenter à l'époque de Newton sous la forme d'une réduction à la quadrature du cercle. Exprimer l'aire cherchée par une intégrale sans en observer les rapports avec ce problème infiniment plus connu, voilà qui eût été un grand et véritable défaut.

---

[1]) P. 51—55.

M'étant occupé dans cette Note et dans la précédente des travaux de Newton et ayant eu pour guide dans les questions historiques les Leçons de M. Cantor, je ne puis m'empêcher de faire encore une observation sur un point de l'analyse de ces travaux qu'on trouve dans cet ouvrage. C'est précisément parce que je ne veux nullement affaiblir — réserve faite des points dont je parle expressément — la confiance qu'on doit avoir dans l'éminent historien, que je ne dois négliger aucune des objections sérieuses que je puis avoir à faire. Je rappelle à cet égard ce que j'ai déjà dit plusieurs fois dans ces Notes et ailleurs: le but de mes critiques, qui ne sont pas fondées sur des recherches historiques très étendues, est seulement de puiser dans mes études mathématiques des plus grands géomètres, des Archimède, des Apollonius, des Fermat et des Newton, quelque supplément aux résultats des recherches plus historiques de M. Cantor, qui ont à cet égard une étendue et une profondeur inconnues jusqu'à présent.

Je fais l'observation préliminaire que selon moi le plan du grand travail de M. Cantor n'aurait pas dû empêcher l'auteur de s'occuper particulièrement des *Principes* de Newton, dont l'importance pour les mathématiques pures est égale à celle qu'a eue cette grande œuvre pour la physique et pour l'astronomie. J'ai parlé dans ma Note précédente du développement donné dans ce livre aux principes infinitésimaux, qui y trouvent une foule d'applications, non seulement à la mécanique, mais encore à la géométrie, et aussi de l'influence qu'ont eue plus tard sur l'évolution de l'analyse les essais de refaire analytiquement ses démonstrations géométriques. Je rappelle encore que ce livre marque le terme d'un des plus intéressants développements qu'il y ait dans l'histoire des mathématiques. Dans l'antiquité on avait été porté à étudier les coniques par un intérêt théorique, et on en avait découvert une foule de propriétés importantes. La connaissance de ces propriétés a trouvé sa plus splendide application par la découverte due à Keppler des véritables trajectoires des planètes, et ensuite par la découverte due à Newton de la loi exprimée par la figure de ces trajectoires. Il y aurait eu un intérêt tout particulier à signaler l'usage immédiat que Newton a fait, dans cette importante découverte, des propriétés connues depuis l'antiquité. M. Cantor ne l'a pas fait. Toutefois, il y a dans son œuvre assez de choses qui méritent notre plus vive reconnaissance pour qu'il lui soit permis d'en fixer lui-même les limites et de laisser à d'autres le soin de suppléer ce qu'il n'a pas voulu y mettre. C'est ce que j'ai essayé de faire pour la question actuelle dans les modestes limites de ma Note précédente [1]).

La connexion la plus intime avec les recherches des anciens se montre encore dans la section purement géométrique du premier livre des *Principes*: celle-ci a pour objet la détermination des coniques par des conditions données. M. Cantor ne néglige pas entièrement d'en parler [2]); mais c'est la manière dont il s'en acquitte qui fera l'objet de la présente critique. Au lieu des découvertes originales de Newton, il cite, comme exemple des théorèmes de géométrie qu'on lui doit, celui qui exprime que les produits des distances d'un point d'une conique aux côtés opposés d'un quadrilatère, mesurées sur des droites faisant des angles donnés avec les côtés, ont un rapport constant. Ce théorème, qu'on a appelé théorème de Pappus, n'appartient pas à Newton; il a une histoire dont l'importance égale à certains égards celle qu'a eue la théorie antique des coniques pour les progrès modernes de l'astronomie. M. Cantor n'en dit absolument rien à l'endroit cité, et ce qu'il en avait dit dans les tomes précédents en parlant de Pappus et de Descartes [3]) suffit à peine à préserver le lecteur de l'erreur

---

[1]) P. 250—55.

[2]) Cantor III, p. 200.

[3]) T. I, p. 422 (2e édition); T. II, p. 741. M. Cantor ne s'y occupe que de la généralisation due à Pappus. C'est seulement dans une nouvelle Note (*Bulletin de Darboux* 1895, p. 68) qu'il rappelle la partie antique

de croire que le théorème en question a été trouvé par Newton. Rappelons donc en peu de mots cette histoire.

Le théorème dont il s'agit énonce la solution du problème relatif au lieu dit *à quatre droites*, qui avait — en même temps que le lieu *à trois droites* qu'on en déduit en faisant coïncider deux côtés opposés du quadrilatère — occupé les géomètres grecs depuis les temps d'Aristée et d'Euclide. La connexion de ce qui nous est rapporté sur ce lieu avec la théorie des coniques nous montre bien qu'on a su dès lors que c'est une conique; mais il y a eu quelque chose d'incomplet, soit dans la démonstration de ce théorème, soit dans la détermination de la conique correspondant à un quadrilatère donné et à un rapport connu[1]).

Apollonius nous assure que les théorèmes du 3e livre de ses *Coniques* lui permettent de déterminer complètement les lieux en question. Bien qu'il ne nous communique pas immédiatement cette détermination, la perfection et l'exactitude de toutes les recherches géométriques que nous avons de sa main inspirent une telle confiance qu'il est impossible de ne pas croire à sa parole à cet égard. Ce qu'en dit Pappus, témoin peu favorable, du reste, à Apollonius, confirme entièrement l'énoncé de celui-ci. Pappus généralise d'ailleurs le problème en demandant le lieu des points dont les distances à deux groupes de droites forment des produits ayant un rapport donné.

---

de l'histoire des lieux géométriques dont nous allons parler. Il relate à cet égard les faits historiques sur lesquels j'appuie ma restitution (hypothétique quant au détail) de la détermination antique de ces lieux; mais — malgré le caractère polémique de son article — il ne discute pas du tout les interprétations d'Apollonius qui constituent la base géométrique de cette restitution.

[1]) Dans ma Théorie des coniques dans l'antiquité (*Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Deutsch durch* v. Fischer-Benzon 1886) j'énonce l'hypothèse que ce qui empêchait de résoudre complètement le problème, c'est qu'avant Apollonius on ne faisait pas usage de la combinaison des deux branches d'une hyperbole, et je rends compte des faits qui rendent vraisemblable cette hypothèse.

Conduisant à des courbes dont on n'avait encore aucune connaissance, le problème de Pappus est une sorte de définition de ces nouvelles courbes[1]).

Au XVII^e siècle, époque où l'on avait pénétré jusqu'au fond des vérités consignées dans les écrits mathématiques conservés de l'antiquité — beaucoup mieux étudiés alors que par les géomètres et par les historiens de nos jours — et où l'on se sentait assez fort pour continuer l'œuvre des anciens, il était naturel d'essayer avant tout: 1° de retrouver la détermination complète d'une conique comme lieu à trois ou à quatre droites 2° de trouver une autre détermination des lieux plus généraux de Pappus que celle qu'exprime immédiatement leur définition.

Ces essais ont conduit à la fondation de la géométrie analytique. Fermat a résolu le premier de ces deux problèmes, Descartes les a résolus l'un et l'autre[2]), en combinant avec l'usage des coordonnées la nouvelle algèbre, qui avait commencé de prendre une position indépendante de la géométrie, organe jusqu'alors unique des mathématiques exactes. On appliqua ensuite les mêmes méthodes à d'autres questions.

Bien que les déterminations des lieux à trois ou à quatre droites qu'ont trouvées Fermat et Descartes se rattachent à la géométrie d'Apollonius, bien plus directement que ne devait le faire plus tard une détermination par la géométrie

---

[1]) La détermination des coniques comme lieu à quatre droites étant une représentation générale de ces courbes, on serait tenté de regarder la généralisation de Pappus comme un essai de représenter d'une manière générale toutes les courbes qui dépendent de constructions géométriques (ou bien les courbes dites à présent algébriques). Un tel essai n'eût pas été très heureux; car il existe des courbes algébriques qu'on ne peut représenter de cette manière, quoique Descartes semble encore croire à la généralité d'une telle représentation (*Géométrie,* édition de 1885, p. 10).

[2]) Voir ma *Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité, et sur l'invention de cet instrument.* Bulletin de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, 1888, p. 127—144.

analytique [1]), elles différaient par l'emploi de la nouvelle analyse de celles qui étaient à la disposition d'Apollonius [2]). Au contraire le grand intérêt de la démonstration qu'a donnée Newton du théorème relatif au lieu à quatre droites dérive de la circonstance qu'il le déduit immédiatement de théorèmes connus par Apollonius et à l'aide de procédés semblables aux siens [3]).

A l'observation faite ici sur un passage du livre de M. Cantor se rattache de très près une autre remarque. Dans leurs premières déterminations de lieux solides, Fermat et Descartes font usage de coordonnées obliques. Leurs premières mises en équation des problèmes de lieux à trois, à quatre ou à plusieurs droites sont, en effet, facilitées par des choix convenables d'axes coordonnés qui ne sont pas toujours perpendiculaires entre eux. Même en sachant que M. Cantor ne regarde pas comme de véritables coordonnées celles dont se servaient les géomètres de l'antiquité, et qui pouvaient être orthogonales ou obliques, on ne voit pas sans étonnement qu'il considère l'introduction des coordonnées obliques comme un progrès particulier dû à Newton [4]).

---

1) Voir à la p. 136 de la Note que je viens de citer.

2) Cependant Fermat a donné du théorème relatif au lieu à trois droites une démonstration semblable à celle que contiennent effectivement les dernières propositions du 3e livre d'Apollonius. *Varia Cpera* p. 87—89

3) Pour la question de savoir quelle est la probabilité de l'identité essentielle de la détermination de Newton avec celle d'Apollonius, je renvoie à une note de mon livre sur la Théorie des coniques dans l'antiquité (édition danoise p, 92; édition allemande p. 134—135).

4) Cantor III, p. 168: ... *hat Newton den nur von Fermat fast verstohlenerweise angedeuteten Fortschritt vollzogen, dass die Ordinaten der Curve nicht mehr senkrecht zu den Abscissen gezeichnet sind.*